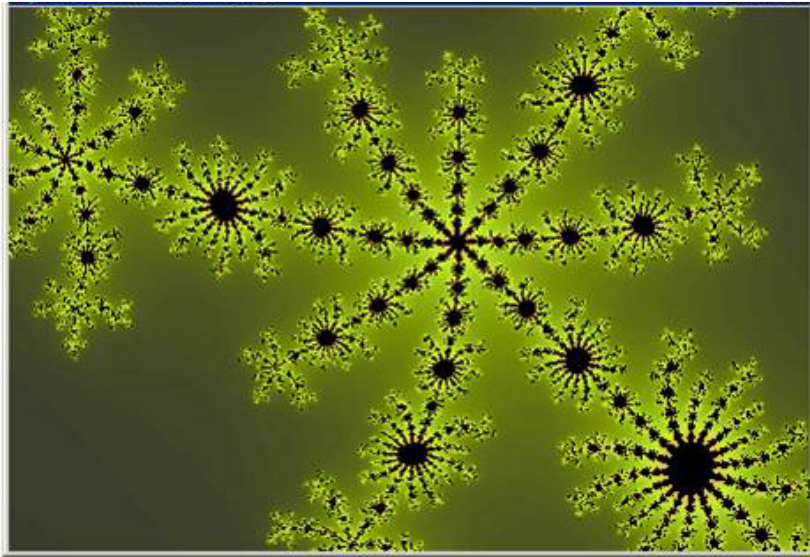


Лекция 1. ГЕОМЕТРИЯ ФРАКТАЛОВ



Данная лекция направлена на введение слушателей курса в мир фракталов и самоподобных объектов. Рассмотрены основные идеи фрактальной геометрии, способы построения фракталов различного типа и некоторые их практические применения.

Геометрия Эвклида имеет дело с "гладкими" объектами: шар, яйцо, цилиндр, кубик и т.п. Такие объекты можно найти в природе, но они редки. Обычно контуры, поверхности и объёмы окружающих нас предметов не ровны, не гладки и не совершенны. Они неровны, шершавы, изъязвлены множеством отверстий самой причудливой формы,

пронизаны трещинами и порами, покрыты сетью морщин и царапин. Можно ли их как-то количественно описать? Геометрия фракталов говорит: не все, но многие можно. Если они самоподобны. Геометрии, общей для всех объектов, пока не существует.

Начнём с геометрии Эвклида. Дан шар радиуса r . Площадь сечения по экватору $S=\pi r^2$, длина экватора $l=2\pi r$, периметра к площади

$$\frac{l}{S} = 2 \frac{1}{r} = 2 \cdot r^{-D}, \text{ где } D=1. \quad (1)$$

Площадь поверхности шара $S=4\pi r^2$, объём $V=(4/3)\pi r^3$, отношение

$$\frac{S}{V} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \pi r^2}{4\pi r^3} = 3 \frac{1}{r} = 3 \cdot r^{-D}, \text{ где } D=1 \quad (2)$$

Отношение

$$\frac{l}{V} = \frac{2 \cdot 3 \cdot \pi r}{4\pi r^3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r^2} = 1,5 \cdot r^{-D}, \text{ где } D=2. \quad (3)$$

Имеем показательные функции с некоторым множителем (на него не обращаем внимания - он нас в дальнейшем интересовать не будет) с показателем степени D , который имеет ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ значения: здесь или 1 или 2. Важно, что это не только свойство сферы, но свойство любых геометрических тел, свойство геометрии Эвклида.

Если я возьму яблоко, то в пределах ошибки измерения у меня получатся те же зависимости. А если я откушу гнилыми зубами кусок яблока, то что произойдет с геометрическими характеристиками осадка?

Эксперимент будем проводить так: утопим огрызок в стакане воды, и по количеству вытесненной воды определим его объём V , затем покрасим огрызок и по количеству затраченной краски (зная сколько краски идёт на 1 см^2) найдем величину поверхности огрызка. Введя некоторый масштабированный параметр r , получим

$$S/V \sim r^{-D}, \quad (4)$$

где D - дробное число, в зависимости от развитости рельефа и размерности пространства лежащее где-то между 0 и 3.

Далее мы будем называть D учёным словом ПОКАЗАТЕЛЬ ФРАКТАЛОВ. Но является ли огрызок яблока фрактальной структурой? Нет, не является. Колобок дифференцируем в любой точке, и потому попадает под геометрию Эвклида, ёжик не дифференцируем ни в одной точке, D у него дробное, но фракталом он не является.

Чтобы объект отнести к фракталам мало иметь дробное значение D (хотя иметь, конечно, надо обязательно), нужно, чтобы структура была самоподобна, масштабно инвариантна (обладать скейлингом). Грубо говоря, картина при любой степени увеличения в своих основных чертах должна оставаться неизменной (т.е. с каким бы шагом (большим или самым мелким) не измерял бы я длину, величина D должна оставаться постоянной). Ни с Колобком, ни с огрызком яблока, ни с ежом такого не получится, а вот с облаками, горами, дельтой реки может получиться (хотя и не всегда). Существуют чисто математические объекты, к которым дробность и самоподобие применимы на 100%.

Сказанное выше - вольная интерпретация красивой идеи. Займёмся теперь грамотным обоснованием фрактальной геометрии.

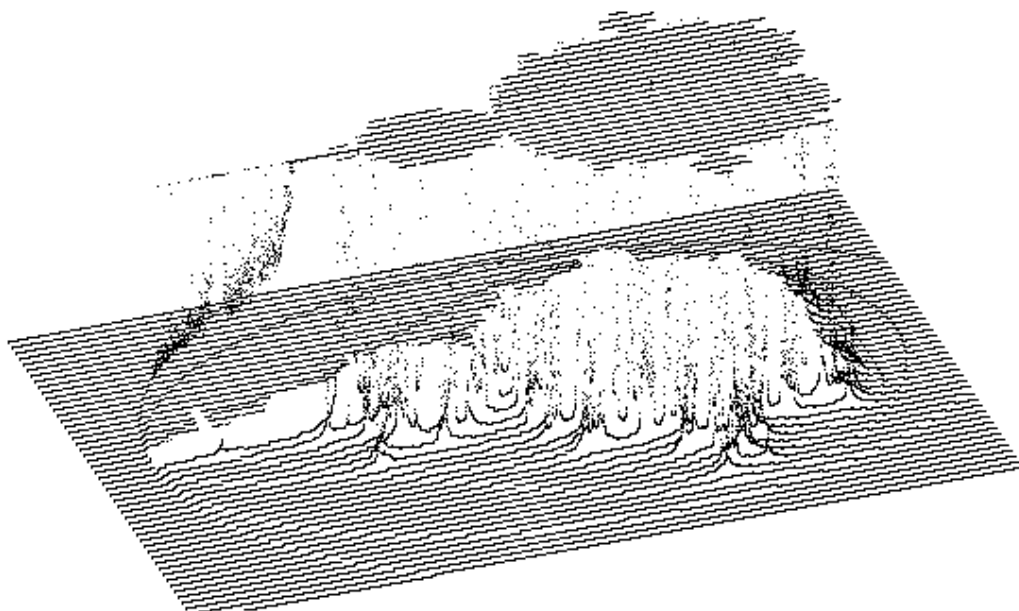


Рис. 1. Трёхмерное множество Мандельброта и его проекция.

Фракталы — язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур. Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же чётко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии.

С математической точки зрения фрактал (*fraction, fractional* - дробь, дробный) - это прежде всего множество с дробной размерностью. В геометрии Эвклида точка имеет размерность 0, отрезок и окружность - размерность 1, круг и сфера - размерность 2. Феликс Хаусдорф (1868-1942) в 1919 г. первым нашёл в математике множества с дробной размерностью (канторово множество, кривая Коха и др.). Это направление развивал Абрам Самойлович Безикович (1891-1970), размерность Хаусдорфа-Безиковича нашла применение в некоторых разделах математики, но громадный интерес к ней возник после публикации в 1975 году Бенуа Мандельбротом (1924-2010) книги (наиболее известное издание *Benoit B. Mandelbrot//The Fractal Geometry of Nature Henry/Holt and Company, 1983, P. 468*), в которой он привёл яркие примеры применения фракталов к объяснению некоторых природных явлений. Он выделил те математические множества и объекты, которые можно разбить на сколь угодно малые части, причём каждая часть окажется просто уменьшенной копией целого: если мы будем смотреть на фрактал в микроскоп, то увидим ту же самую картинку, что и без микроскопа. Успех фракталов связан с тем, что он воспользовался удобной количественной мерой неидеальности объектов - извилистости, морщинистости, трещиноватости, пористости объёма - размерностью Хаусдорфа-Безиковича.

Фрактал (*fractus* — дроблёный, состоящий из фрагментов) — термин, введённый Б.Мандельбротом в 1975 году для обозначения множеств с дробной размерностью Хаусдорфа-Безиковича (НВ); эта размерность строго больше топологической. Для самоподобных множеств, типа канторовского множества, НВ-размерность совпадает с размерностью подобия.

С практической точки зрения важно, что в наиболее простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале.

Применительно к идеальным объектам классической евклидовой геометрии она давала те же численные значения, что и известная топологическая размерность (иначе говоря, была равна нулю для точки, единице - для гладкой плавной линии, двум - для фигуры и поверхности, трём - для тела и пространства). Но совпадая со старой, топологической, размерностью на идеальных объектах, новая размерность обладала более тонкой чувствительностью к несовершенствам реальных объектов, позволяя различать и индивидуализировать то, что прежде было безлико и неразлично. Так, отрезок прямой, отрезок синусоиды и самый причудливый меандр неразличимы с точки зрения топологической

размерности - все они имеют топологическую размерность, равную единице, тогда как их размерность Хаусдорфа - Безиковича различна и позволяет числом измерять степень извилистости. Но самое важное в этой размерности, что она способна принимать не только целые, как топологическая размерность, но и дробные значения.

Равная единице для прямой (бесконечной, полубесконечной или для конечного отрезка), размерность Хаусдорфа - Безиковича увеличивается по мере возрастания извилистости, тогда как топологическая размерность упорно игнорирует все изменения, происходящие с линией, если только они не сопровождаются разрывом или склеиванием каких-то точек. При этом, увеличивая свое значение, размерность Хаусдорфа - Безиковича не меняет его скачком, как сделала бы на ее месте топологическая размерность; она принимает дробные значения: равная единице для прямой, она становится равной 1,02 для слегка извилистой линии, 1,15 - для более извилистой, 1,53 - для очень извилистой и т.д. Для того чтобы особо подчеркнуть способность размерности Хаусдорфа - Безиковича принимать дробные, нецелые, значения, Мандельброт и придумал свой неологизм, назвав ее фрактальной размерностью. Итак, фрактальная размерность (не только Хаусдорфа - Безиковича, но и любая другая) - это размерность, способная принимать не обязательно целые значения, фрактал - объект с фрактальной, размерностью, а фрактальность - свойство объекта быть фракталом или размерности быть фрактальной.

Многие объекты, построенные математиками, оказались фракталами, т. е. объектами с дробной, или фрактальной, размерностью Хаусдорфа - Безиковича. Все они очень красивы и часто носят поэтические названия: канторовская пыль, кривая Пеано, снежинка фон Коха, ковер Серпинского и т.д. И все они обладают одним очень важным свойством, которое роднит их с самой обыкновенной прямой. Это свойство называется самоподобием: все эти фигуры подобны любому своему фрагменту. Если вам дадут исходный снимок какого-то фрактального объекта, и снимок, его же, но увеличенный в какое-то число раз, то вы не сможете найти между ними какой-либо разницы.

Так как фрактал состоит из бесконечного числа повторяющихся элементов, невозможно точно измерить его длину. Это означает, что чем более точным инструментом мы будем его измерять, тем большей окажется его длина. В то время как гладкая евклидова линия заполняет в точности одномерное пространство, фрактальная линия выходит за пределы одномерного пространства, вторгаясь в двумерное. Поэтому фрактальная размерность кривой Коха или «колбасы» Минковского находится между 1 и 2.

Фрактальное самоподобие (скейлинг) повторение фракталом самого себя на разных масштабных уровнях, т. е. неизменность закона построения фрактала.

Самоподобный объект — объект, в точности или приближённо совпадающий с частью себя самого (то есть целое имеет ту же форму, что и одна или более частей). Многие объекты реального мира, например, береговые линии, обладают свойством статистического самоподобия: их части статистически однородны в разных шкалах измерения. Самоподобие есть характеристическое свойство фрактала. Инвариантность относительно изменения шкалы является одной из форм самоподобия, при которой при любом приближении найдётся по крайней мере одна часть основной фигуры, подобная целой фигуре.

Самоподобный объект выглядит неизменным и после увеличения и после уменьшения его размеров. Многие законы не зависят от масштаба. Тем не менее скейлинг имеет предел: постоянную Планка, когда объекты становятся слишком малыми, или скорость света - когда объекты движутся слишком скоро. В некотором смысле самоподобие - это тоже периодичность, только в логарифмической шкале.

Все фракталы, обладающие хотя бы какой-нибудь симметрией, самоподобны.

Самоподобие означает, что у объекта нет характерного масштаба: будь у него такой масштаб, вы сразу бы отличили увеличенную копию фрагмента от исходного снимка. Самоподобные объекты обладают бесконечно многими масштабами на все вкусы. Разумеется, далеко не все фракталы обладают столь правильной, бесконечно повторяющейся структурой, как объекты рождённые фантазией математиков и художников. Многие фракталы, встречающиеся в природе (поверхности разлома горных пород и металлов, облака, турбулентные потоки, пена, гели, контуры частиц сажи и т.д.), лишены геометрического подобия, но упорно воспроизводят в каждом фрагменте статистические свойства целого. Такое статистическое самоподобие, или самоподобие в среднем, выделяет фракталы среди множества природных объектов. Даже простейшие из фракталов - геометрически самоподобные фракталы - обладают непривычными свойствами. Например, снежинка фон Коха обладает периметром бесконечной длины, хотя ограничивает конечную площадь. Кроме того, она такая колючая, что ни в одной точке контура к ней нельзя провести касательную (снежинка фон Коха нигде не дифференцируема).

Не менее необычна и физика фракталов. Фрактальные среды обладают настолько сложной геометрией, что многие процессы протекают в них не так, как в обычных сплошных средах. Изучая их

фракталы, мы учимся различать и предсказывать важные особенности окружающих нас предметов и явлений, которые прежде, если и не игнорировались полностью, то оценивались лишь приблизительно, качественно, на глаз. Например, сравнивая фрактальные размерности сложных сигналов, энцефалограмм или шумов в сердце, медики могут диагностировать некоторые тяжелые заболевания на ранней стадии, когда больному еще можно помочь. Барабан, натянутый на гладкий или фрактальный контур, звучит по-разному, и это различие можно использовать для диагностики характера контура и определения его фрактальной размерности. Метеорологи научились определять по фрактальной размерности изображения на экране радара скорость восходящих потоков в облаках, что позволяет с большим упреждением выдавать морякам и летчикам штормовые предупреждения. Такого рода применений фракталов уже сейчас существует великое множество, и число их все увеличивается.

Свойство самоподобия коренным образом отличает фракталы от объектов геометрии Эвклида. Действительно, возьмём такой объект, как график дифференцируемой функции. Если мы направим микроскоп в какую-то точку этого графика, то при увеличении изображения увидим прямую - касательную в этой точке. Классические объекты упрощаются при увеличении изображения, в "малом" они линейны (прямая, плоскость и т.д.). Фракталам же присуща "внутренняя бесконечность" - производные в каждой точке обращаются в бесконечность.

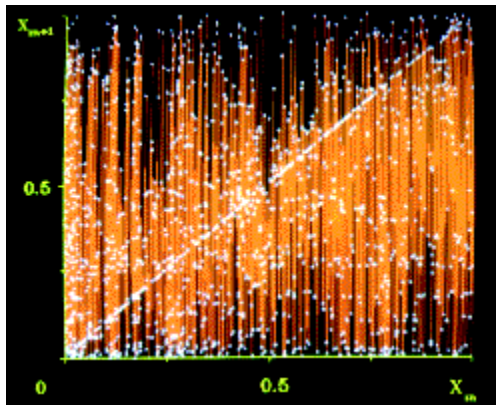


Рис. 1. Функция Вейерштрасса. Всюду непрерывная, нигде не дифференцируемая: производные в каждой точке обращаются в бесконечность.

У фракталов есть одно важное общее свойство: степень изрезанности или сложности их структуры может быть измерена неким характеристическим числом — фрактальной размерностью D .

Фракталы бывают одномерными, двумерными и трёхмерными. Типичным примером одномерного фрактала является канторово множество, на основе которого стоит фрактал - канторова пыль.

Канторово множество — один из простейших фракталов, подмножество единичного отрезка вещественной прямой. Описано в 1883 г. Кантором.



Рис. 2. Построение канторова множества.

Канторово множество имеет топологическую размерность 0, промежуточную, т.е. не целую) Хаусдорфову размерность равную $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,63$, нулевую меру Лебега.



Рис. 3. Построение канторовой пыли на квадрате.

Канторова пыль относится к фрактальному множеству с $D < 1$. В математике его основой является уравнение Ферхюста и логистическое уравнение, описывающее рост популяции животных. Построение канторовской пыли аналогично кривой Коха, с тем отличием, что на n -м шаге осуществляется не добавление, а удаление n интервалов длиной $Ln = (2/3)n$, в соответствии с этим длина оставшегося множества составляет $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,631$ а каждое звено ln остается тем же, что и в фигуре Коха. "Канторова пыль" представляет образование, промежуточное между точкой и линией. Процедура построения канторовского множества может быть представлена иерархическим деревом Кейли (рис. 4).

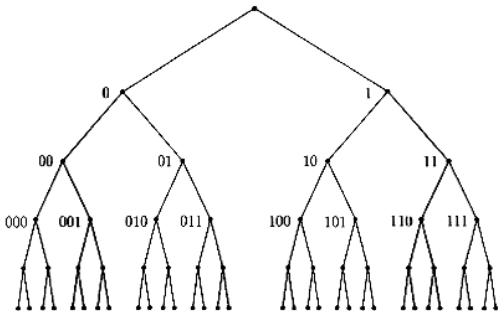


Рис. 4. Дерево Кейли.

Для рассматриваемой в данном курсе лекций идеологии, важно, что удвоение периода роста является сценарием перехода от порядка к хаосу.

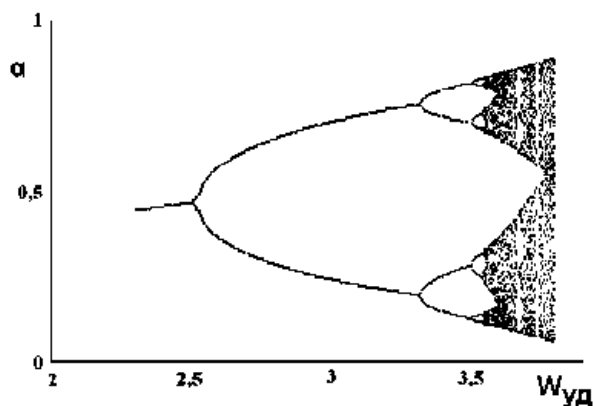


Рис. 5. Образование канторовой пыли (хаоса) совместно с бинарным лексикографическим деревом

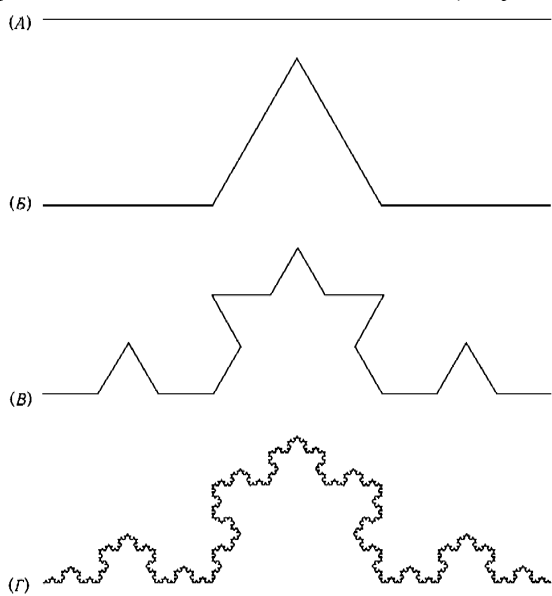
Рассмотрение фрактальной размерности начнём с примера регулярных, самоподобных фракталов. Рассмотрим сначала отрезок единичной длины, который разбит на N равных кусков длиной b , так что $N = 1/b$. По мере уменьшения b значение N растёт линейно, что и следовало ожидать для одномерной кривой. Аналогично, если мы разделим квадрат единичной площади на N равных квадратиков со стороной b , то получим $N = 1/b^2$ - ожидаемый для двумерного объекта результат. Можно утверждать, что в общем случае $N = 1/b^D$, где D размерность объекта. Логарифмируя обе части этого равенства, выразим размерность в виде

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{b}\right)}, \quad (5)$$

которая не зависит от основания логарифма.

Теперь применим эти соображения к **кривой Коха**. На каждой стадии формирования этой кривой замена средней трети каждого сегмента производится в направлении, которое увеличивает площадь под кривой. Можно увидеть, что при каждом уменьшении длины b в три раза число сегментов увеличивается в четыре раза. Таким образом имеем $N = 4$ и $b = 1/3$, и фрактальная размерность треугольной кривой Коха равна $D = \ln 4 / \ln 3 = 1,2618...$

В триадной кривой Коха (предложена Хельге фон Кохом в 1940 г.) ни в одной точке нельзя провести касательную. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины (рис.1) - это 0-е поколение кривой Коха. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на образующий элемент,



обозначенный на рис. 6 через $n=1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Коха. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$. Для получения 3-го поколения проводятся те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется предфракталом. На рис. 6 представлены пять поколений кривой. При n стремящимся к бесконечности, кривая Коха становится фрактальным объектом.

Рис. 6. Построение кривой Коха.

Применив генератор фон Коха к равностороннему треугольнику и закрасив внутренность построенной фигуры в чёрный цвет, получим сплошную звезду Давида (рис. 6А). Бесконечная итерация такого построения приводит к снежинке фон Коха (рис. 6Б). После n итераций периметр снежинки становится в $(4/3)^n$ раз больше периметра исходного треугольника. При n , стремящемся к бесконечности, периметр снежинки становится бесконечно большим. Следовательно, длина перестаёт быть удобной величиной для количественной характеристики периметра. Необходимо ввести

какую-то новую меру, которая позволила бы различать фракталы, порождаемые различными генераторами.

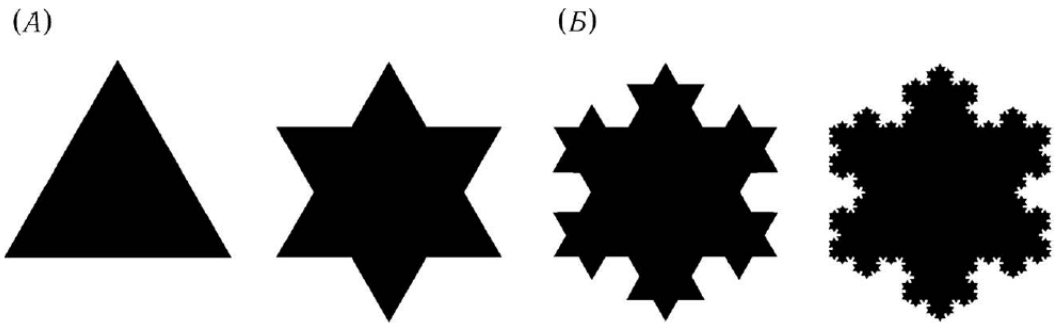


Рис. 6. Инициатор и генератор для снежинки Коха (А) и промежуточные стадии построения снежинки фон Коха.

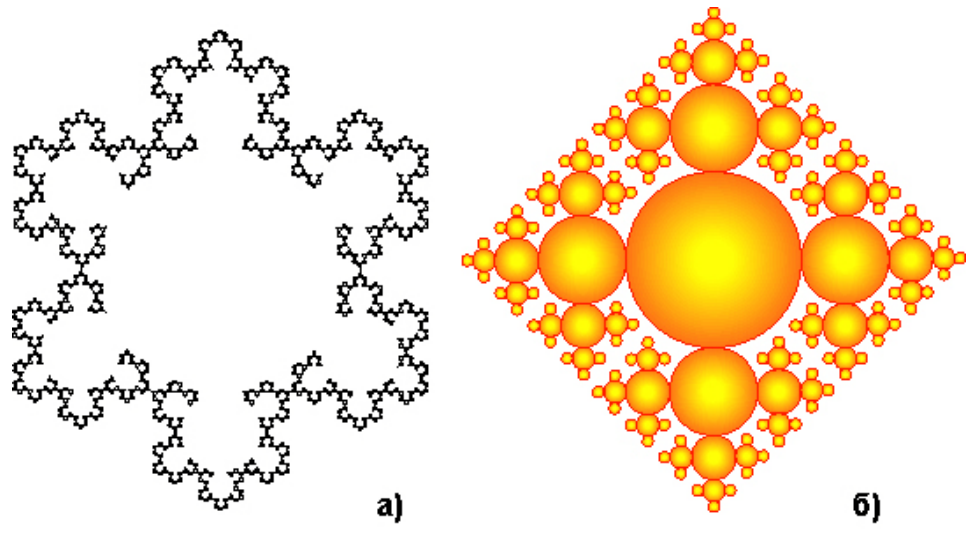


Рис. 7 Фигуры Коха, построенные из шестиугольников и окружностей.

В Табл. 1 производящих форм в п.6 представлена треугольная снежинка. Формообразование шестиугольной снежинки Кеппера строится продолжением трёх лучей исходной треугольной снежинки. Следует обратить внимание, что при этом все пушинки этой снежинки от центра направлены наружу, как иголки на еловой ветке. Это свидетельствует о том, что формообразующая сила сосредоточена в центре снежинки и действует оттуда одинаково по всем направлениям. Фрактальная размерность снежинки Кеппера: $\frac{\log 6}{\sqrt{\log 3}} = 3.262$.

Табл.1. Конструкции производящих фрактальных форм.

1)Кривая Коха(треугольная)		$D_G = \log 4 / \log 3 = 1.2618...$ $N=4, b=1/3$
2) Видоизменённая кривая Коха (прямоугольная)		Единичный сегмент имеет три отрезка длиной 1/3. два отрезка длиной 1/4. Из соотношения $3(1/3)^D + 2(1/4)^D = 1$ $D_G = 1.34.$
3)>Видоизменённая кривая Коха (меандр)		$D_G = \log 8 / \log 4 = 3/2$ $N=8, b=1/4$
4)Канторовская пыль		$D_G = \log 2 / \log 3 = 0.6309...$ $N=2, b=1/3$
5)Дерево		$D_G = \log 5 / \log 3 = 1.465...$ $N=5, b=1/3$
6) Снежинка		$D_G = \log 3 / \log (3)^{1/2} = 2$ $N=3, b=1/(3)^{1/2}$
7) Прокладка Серпинского		$D_G = \log 3 / \log 2 = 1.585...$ $N=3, b=1/2$

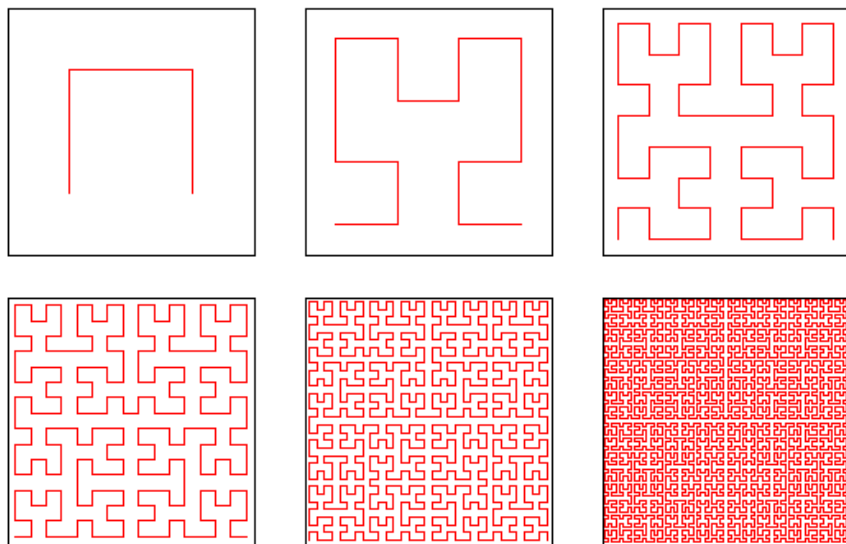


Рис. 8. Пример кривой Пеано, построенный Гильбертом. Здесь показан порядок обхода квадратиков 1-6 уровня.

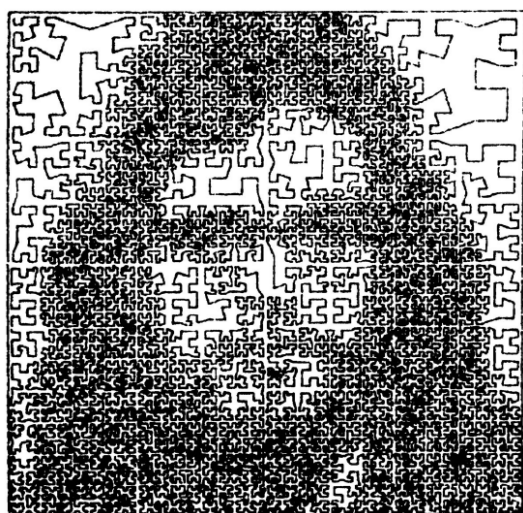


Рис. 9. Деформированная кривая Гильберта: точка зрения художника.

Интересно, что при $D_H=2$ мы не обязательно получим двумерную фигуру: вполне достаточно оказывается топологически одномерного объекта – линии. Известным примером может служить асимптотически самоподобная кривая Гильберта (рис. 8), проходящая сколь угодно близко от любой точки единичного квадрата. Она строится на кривой Пеано.

Кривая Пеано — общее название для параметрических кривых, образ которых содержит квадрат (или, в более общем смысле, открытые области пространства).

Окончательный результат самоподобен: раздвиг любой подквадрат в 2^n раз, мы получим кривую в точности похожую на всю кривую.

Поскольку n -поколение кривой Гильберта состоит из $2^{2n}-1$ звеньев длиной $1/2^n$, её размерность Хаусдорфа равна 2, как и подобает кривой, заполняющей плоскую фигуру. На рис. 9 представлен вариант кривой Гильберта, рожденный фантазией художника.

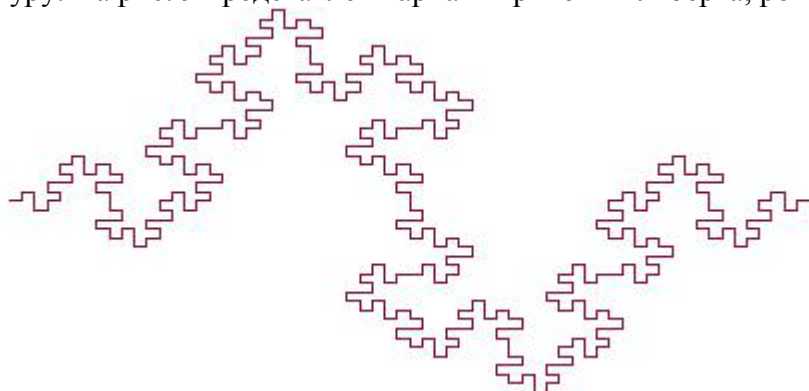


Рис. 10. Кривая Минковского.

Классическим геометрическим фракталом является **кривая** (колбаса) Минковского. Инициатором является отрезок, а генератором - ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга) — см. рис. 10. Кривая Минковского нигде не дифференцируема и не спрямляема, не имеет самопересечений, имеет Хаусдорфову размерность $\ln 8 / \ln 4 = 3/2 = 1,5$ (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/4$). В частности, кривая Минковского имеет нулевую меру Лебега.

Интересным примером автоподобной кривой является “кривая дракона”, придуманная Э.Хейуэем. Для ее построения возьмем отрезок, повернем его на 90° вокруг одной из вершин и добавим полученный отрезок к исходному. Получим угол из двух отрезков. Повторим описанную процедуру. Повернем угол на 90° вокруг вершины и добавим полученную ломаную к исходной (рис. 11). При построении следующих

поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рис. представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется **драконом Хартера-Хейтуэя**.



Рис. 11. Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя

Линейный алгоритм построения фрактала можно представить в виде копировальной машины со многими редукторами, способными многократно уменьшать исходное изображение. Эта машина действует так же, как и обыкновенная копировальная машина, обладающая возможностью уменьшать или увеличивать изображение, но отличается тем, что имеет несколько уменьшающих линз, каждая из которых может копировать вводимое в машину изображение. Линзы могут настраиваться на различную степень уменьшения, и уменьшенные изображения могут помещаться в любое место. Таким образом, изображение

может перемещаться, сжиматься, отражаться, вращаться и трансформироваться произвольным образом при условии, что прямые линии на изображении остаются прямыми после преобразования.

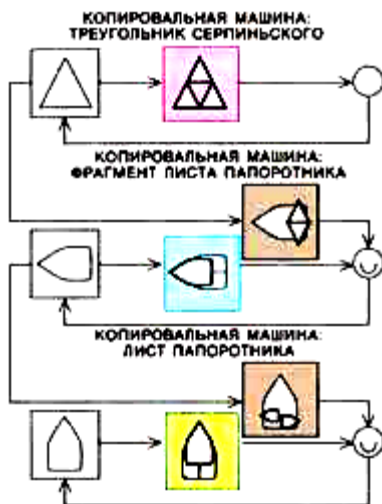


Рис. 12. Сетевая копировальная машина может строить составные фрактальные изображения, такие, как папоротник, состоящий из треугольников Серпинского. Несколько машин соединены в систему и работают параллельно: первая создаёт треугольники Серпинского, вторая располагает треугольники в листья, а третья строит общую форму папоротника (слева). Отметим, что листья попеременно ответвляются от главного стебля то влево, то вправо; треугольники на листьях ориентированы в противоположных направлениях (справа).

подвергается многократной обработке, в процессе которой постепенно возникает фрактальная форма.

Одним из примеров фрактала, полученного при помощи такого алгоритма с обратной связью (рекурсивного алгоритма), является треугольник Вацлава Серпинского (1916 г.), который обладает свойством самоподобия: каждая часть фигуры, сколь бы малой она ни была, содержит изображение, которое в увеличенном виде воспроизводит целый треугольник Серпинского.

Треугольник Серпинского строится копировальной машиной со многими редукторами следующим образом. Изображение помещается в машину, уменьшается наполовину и копируется три раза, по одной копии в каждой вершине равностороннего треугольника. В результате получается триада. При повторении описанной процедуры триада, полученная на предыдущем шаге, снова уменьшается наполовину и копируется три раза и т.д. Уже после шести копирований, или итераций, начинает проступать окончательная форма, которая называется предельным изображением, поскольку оно является окончательным результатом бесконечно повторяющегося цикла копировальной машины. Предельное изображение можно довольно быстро определить путем оценки, но его невозможно достичь в рамках самого процесса.

Предельное изображение не зависит от исходного изображения. Например, в качестве исходного изображения можно взять слово FRACTAL. После шести шагов копирования исходное изображение станет уже практически невидимым, но зато в явном виде начнёт обнаруживаться форма треугольника Серпинского. С каждым новым циклом копирования первоначальное слово FRACTAL будет всё более неразборчивым.

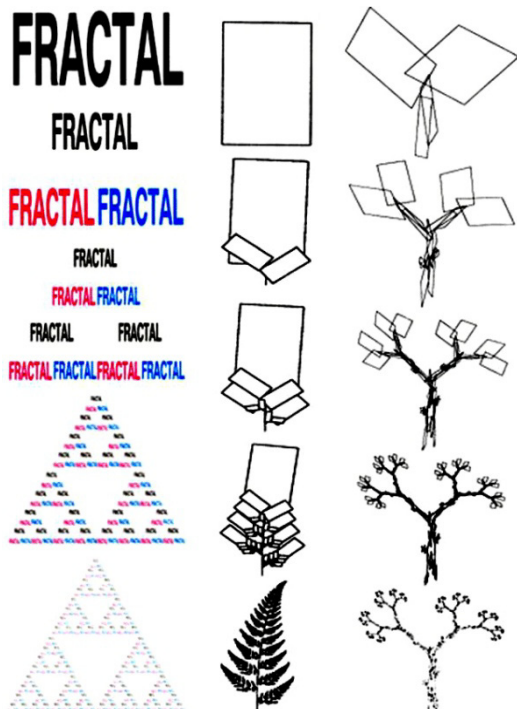


Рис. 13. Фрактальные изображения, генерируемые многократно копировальной машиной с обратной связью, зависят лишь от запрограммированной процедуры копирования. Слово FRACTAL трансформируется программой, которая уменьшает изображение вдвое и копирует его три раза: по одной копии в каждой вершине равностороннего треугольника. Результирующее изображение представляет собой треугольник Серпинского (слева). Несколько более замысловатые преобразования такого же рода порождают фрактал в форме листа папоротника (в центре) или фрактального дерева (справа). Любое исходное изображение, пропущенное через копировальную машину, даст один и тот же результат. Достаточно нескольких чисел, определяющих правила копирования (вверху), чтобы описать изображение, которое потребовало бы сотен тысяч чисел для его представления обычно применяющимися средствами.

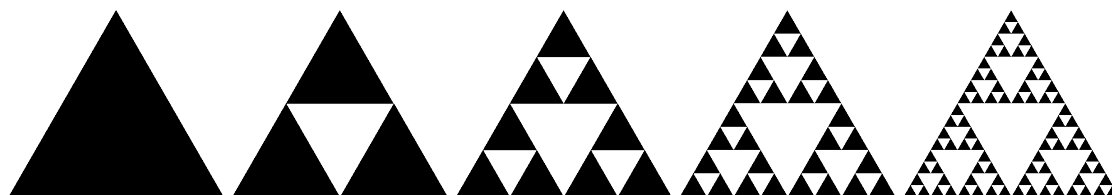


Рис. 14. Этапы построения треугольника Серпинского.

Известным примером фрактала является Ковёр Серпинского (квадрат Серпинского) — один из двумерных аналогов множества Кантора, который имеет топологическую размерность $=1$, промежуточную (т. е. не целую) Хаусдорфову размерность $\ln 8 / \ln 3 \approx 1,89$ и нулевую меру Лебега.

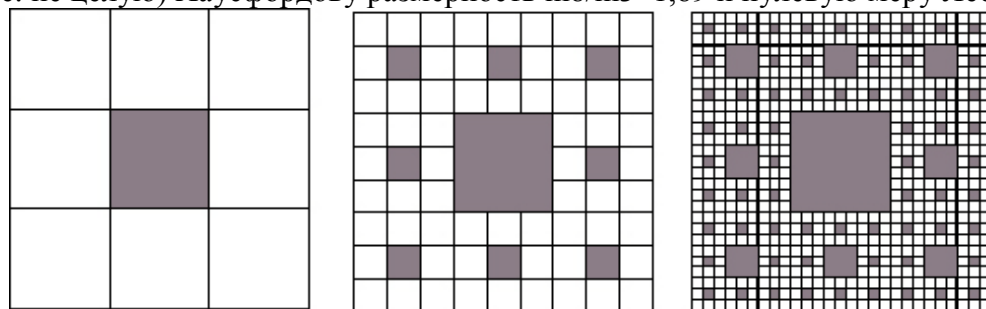


Рис. 15. Построение ковра Серпинского.

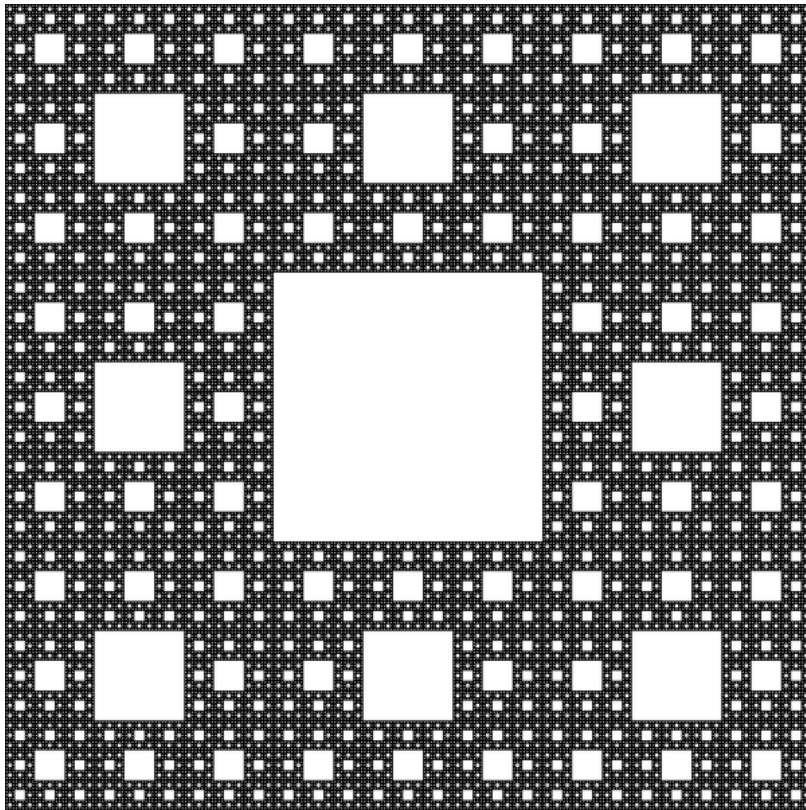


Рис. 16. Ковёр Серпинского.

Самоподобная фигура Серпинского получается из квадрата последовательным вырезанием серединных квадратов. А именно, разделим данный квадрат на девять равных квадратов и серединный квадрат вырежем. Получим квадрат с дыркой (рис.). Для оставшихся восьми квадратов повторим указанную процедуру. Разделим каждый из них на девять равных квадратов и серединные квадраты вырежем. Повторяя эту процедуру, будем получать все более дырявую фигуру. То, что остаётся после всех вырезаний, и будет искомым ковром Серпинского (рис.).

Отметим, что поскольку вырезаемые квадраты располагаются все более часто, то в результате на ковре Серпинского не будет ни одного, даже самого маленького, квадрата без дырки.

Вычислим площадь ковра Серпинского, считая исходный квадрат единичным. Для этого достаточно вычислить площадь вырезаемых квадратов. На первом шаге вырезается квадрат площади $1/9$. На втором шаге вырезается восемь квадратов, каждый из которых имеет площадь $1/81$. На каждом следующем шаге число вырезаемых квадратов увеличивается в восемь раз, а площадь каждого из них уменьшается в девять раз. Таким образом, общая площадь вырезаемых квадратов представляет собой сумму геометрической прогрессии с начальном членом $1/9$ и знаменателем $8/9$. По формуле суммы геометрической прогрессии находим, что это число равно единице, т.е. площадь ковра Серпинского равна нулю.

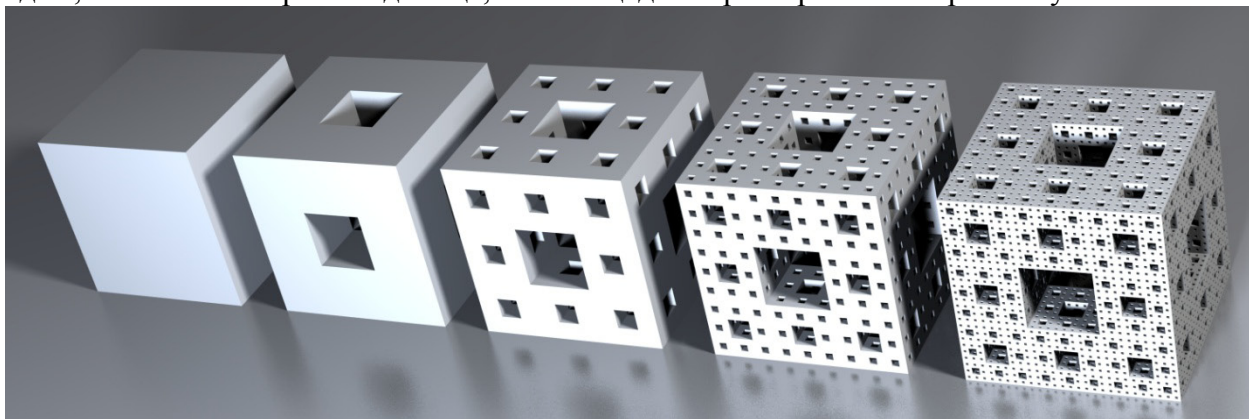


Рис 17. Построение на основе ковра Серпинского (размерность $D \approx 1,8928$) строится губкиа Менгера ($D=2,7268$).

Если рассечь губку Менгера под одним интересным углом, то неожиданно получается фрактальная гексаграмма (звезда Давида, рис. 18).

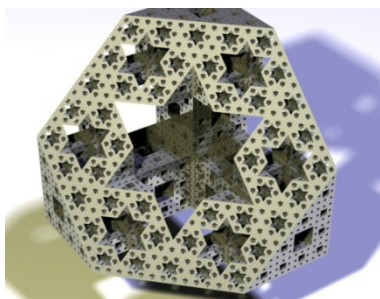


Рис. 18. Одно из сечений губки Менгера.

Салфетка Серпинского также может быть обобщена на трёхмерное пространство (рис. 19).

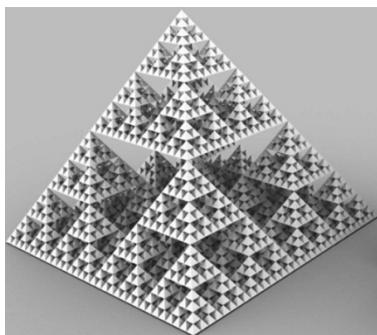


Рис. 19. Обобщение треугольника Серпинского в трёхмерное пространство.

Теперь обратимся к другому семейству фрактальных языков, их нелинейным диалектам. Один из них, так называемый квадратичный диалект порождает большое разнообразие геометрических форм с помощью довольно простого алгоритма, тесно связанного с современной теорией хаоса. Теория, лежащая в основе квадратичного диалекта, впервые была описана в 1918 году французским математиком Гастоном Жюлиа. Он занимался изучением комплексных чисел; как известно, комплексное число состоит из действительного числа и мнимой части, содержащей в качестве

множителя мнимую единицу $i = \sqrt{-1}$. Комплексные числа обычно отображаются на плоскости с перпендикулярными координатными осями, одна из которых представляет действительные числа, а другая мнимые. Жюлюа интересовал вопрос, что будет с последовательностью точек z_k , на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием $q(z) = z^2 + c$. Каждая новая точка z_{k+1} получается подставлением предыдущей точки z_k в приведённую формулу преобразования. Комплексное число c является управляющим параметром, который можно выбирать произвольным образом. Этот несложный процесс с обратной связью порождает потрясающее многообразие форм.

Когда исходная точка z_0 подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, постепенно уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определённой области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество «беглецов», те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству «пленников». Исходная точка z_0 , выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остаётся в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой «тюрьмы» зависит от выбранного значения параметра c . Для точки z_0 , лежащей вне замкнутой области, последовательность z_k удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и множество беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей, известной как множество Жюлиа (см. рис. 5).

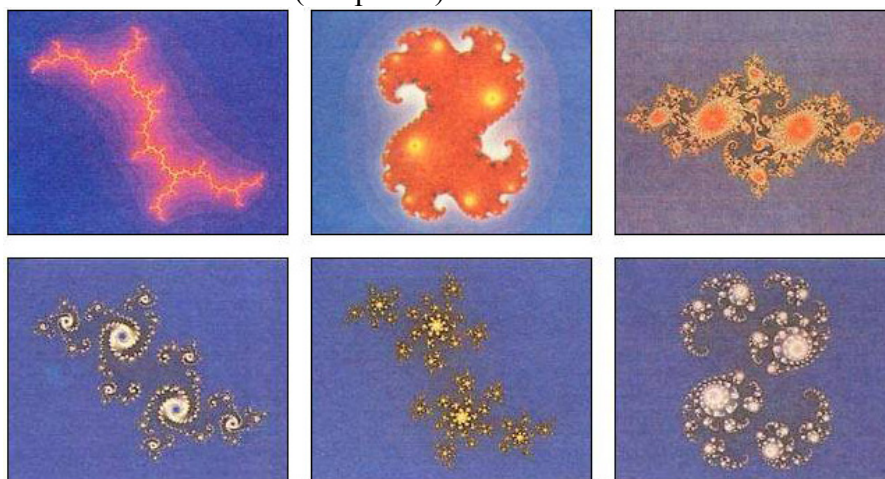


Рис. 20. Множества Жюлиа — это фрактальные границы, возникающие в результате итерирования квадратичного преобразования $z^2 + c$. Они принимают разнообразные и удивительные формы, которые зависят только от числа c , называемого управляющим параметром. Некоторые значения c порождают множества Жюлиа, имеющие одно связное тело (вверху), при других значениях c эти множества распадаются на фрагменты и рассыпаются подобно пылинкам (внизу). Множество Мандельброта состоит из всех точек c , которые ассоциируются со связными множествами Жюлиа; оно служит также «оглавлением» для множеств Жюлиа.

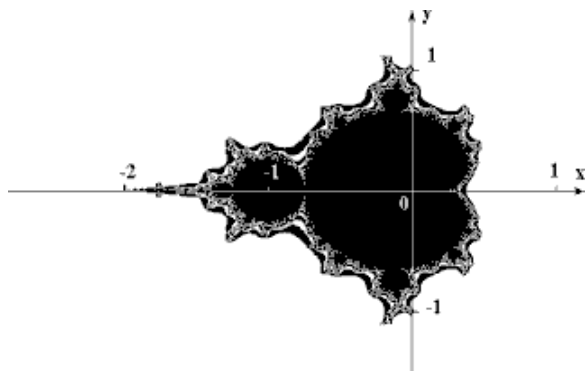


Рис. 21. Множество Мандельброта.

Алгоритм построения множества Мандельброта (относится к алгебраической группе) достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$Z[i+1] = Z[i] \cdot Z[i] + C, \quad (6)$$

где Z_i и C - комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки C прямоугольной или квадратной области - подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $Z[i]$ не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке $(0,0)$, (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например, 200-500) $Z[i]$ сойдется к какой-нибудь точке окружности.



Рис. 22. Участок границы множества Мандельброта, увеличенный в 200 раз.

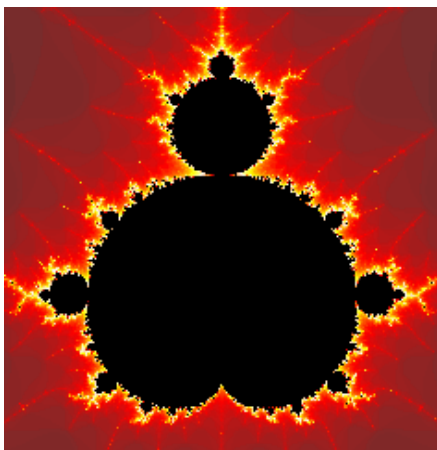


Рис. 23. Множество Мандельброта - классический образец алгебраического фрактала.

Каждая часть множества Мандельброта характеризует соответствующее семейство множеств Жюлиа. Например, основное сердцевидное тело множества Мандельброта характеризует множества Жюлиа, которые выглядят как смятые окружности. Хотя множество Мандельброта, строго говоря, не является самоподобным, как треугольник Серпиньского и фрактальный папоротник, оно обладает сходным свойством: увеличение границы области обнаруживает бесконечное число крошечных копий множества (рис.). Всё богатство форм и структур множества Мандельброта проявляется лишь при таком детальном его исследовании.

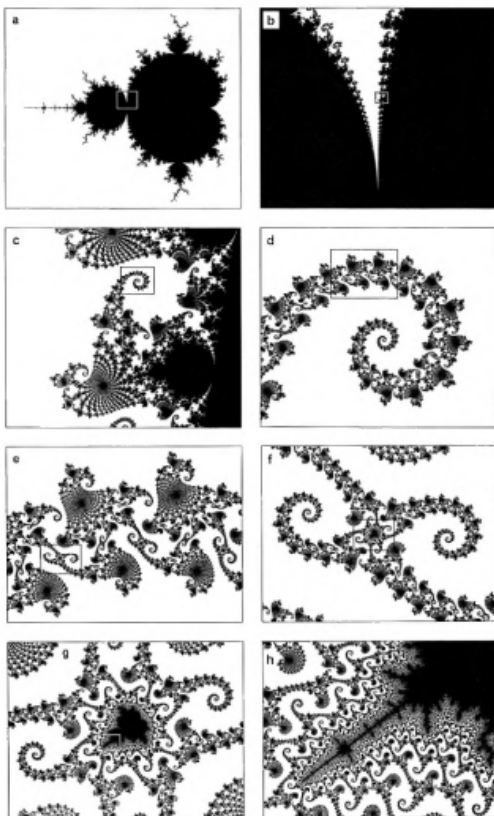


Рис. 24. Множество Мандельброта на нескольких масштабах.



Рис. 25. Трёхмерное представление множества Мандельброта: электрический потенциал, окружающий заряженное множество Мандельброта. Может использоваться как иллюстрация бухты со скалистыми берегами.



Рис. 26. Множество Мандельброта отражает порядок, лежащий в основе бесконечного многообразия множеств Жюлиа. Каждая точка множества Мандельброта представляет значение параметра c , порождающего связанное множество Жюлиа. Если точка c лежит вне множества Мандельброта, то ассоциированное с ней множество Жюлиа несвязно. Множество Мандельброта содержит в себе невероятное богатство мельчайших деталей. Три последовательных увеличения фрагментов (отмечены квадратиками) позволяют увидеть подобные повторяющиеся структуры множества Мандельброта с добавлением многих новых и прежде не повторяющихся элементов. Если всё множество изобразить в масштабе, в котором представлен фрагмент на крайнем правом рисунке, то оно заняло бы площадь, на которой уместилось бы 100 футбольных полей.

Все рассмотренные выше фракталы можно считать детерминированными. Хотя случайные процессы (такие, как бросание игральной кости) иногда и помогают генерировать фрактальные изображения, они не оказывают никакого влияния на окончательную форму фрактала. Совершенно иная ситуация имеет место в отношении другого класса фракталов, а именно так называемых случайных фракталов. Стохастические фракталы получаются, если в итерационном процессе случайным образом менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.

Один из фракталов такого типа может начинаться с треугольника, лежащего в произвольной плоскости. Средние точки сторон треугольника соединены между собой, так что треугольник оказывается разделённым на четыре меньших треугольника. Затем каждая средняя точка сдвигается вверх или вниз на определённую, случайно выбираемую величину. Тот же процесс применяется к каждому из меньших треугольников, затем к ещё меньшим и так далее до бесконечности. После достаточно большого количества итераций начинает возникать всё более детализированная поверхность.

В этом методе смещения средних точек случайные величины для перемещения средних точек вверх или вниз управляются определённым законом распределения, который тщательно подбирается, чтобы получить близкую аппроксимацию желаемой поверхности. Для того чтобы поверхность была относительно гладкой, в преобразования следует встроить правило, согласно которому величина смещения средних точек должна становиться очень малой уже после нескольких первых итераций. Такое правило

позволяет добавлять лишь небольшие «кочки» к общим очертаниям ландшафта. Для представления изрезанной поверхности, характерной, скажем, для горного хребта или береговой линии, более подходящим будет правило медленного уменьшения смещений после каждого шага итерационного процесса.

У данного метода построения поверхностей существует много приложений. Он применялся, в частности, в качестве модели эрозии почвы, для анализа сейсмических явлений, чтобы лучше понять характер изменений в зоне разломов, для построения изображений планет, спутников, облаков и горных хребтов, которые выглядят весьма реалистично (см. рис. 8).

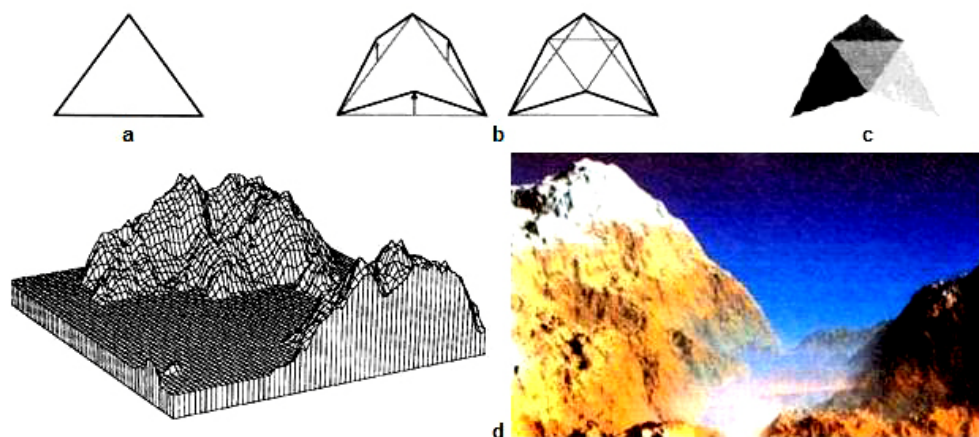
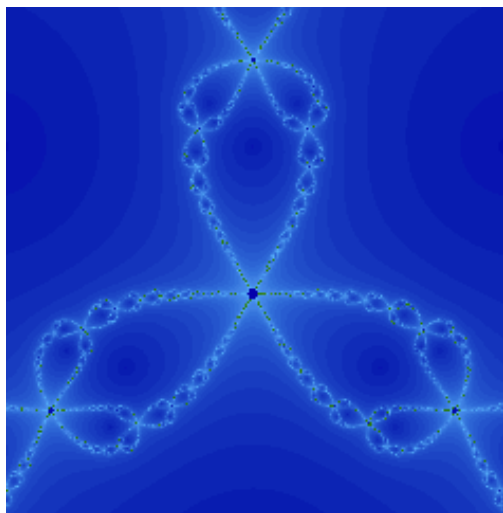


Рис. 27. Фрактальные ландшафты могут создаваться из фракталов методом случайного смещения средней точки. Средние точки сторон треугольника (a) смещаются вверх или вниз от плоскости изображения и соединяются с вершинами (b). При этом возникает четыре меньших треугольника, к которым повторно применяется та же процедура. Функция распределения вероятности определяет величину смещения и, следовательно, степень гладкости фрактального ландшафта. Затем графическая программа компьютера закрашивает треугольники, создавая различные оттенки (c). В результате получается весьма реалистичная картина (d).



Бассейны Ньютона также являются примерами алгебраических фракталов. Области с фрактальными границами появляются при приближенном нахождении корней нелинейного уравнения алгоритмом Ньютона на комплексной плоскости (для функции действительной переменной метод Ньютона называют *методом касательных*, который обобщается для комплексной плоскости).

Рис. 28. Бассейны Ньютона.

Огромный интерес к фракталам связан с тем, что они внешне сильно напоминают природные объекты (см., например, рис. 29).



Рис. 29а. Растения

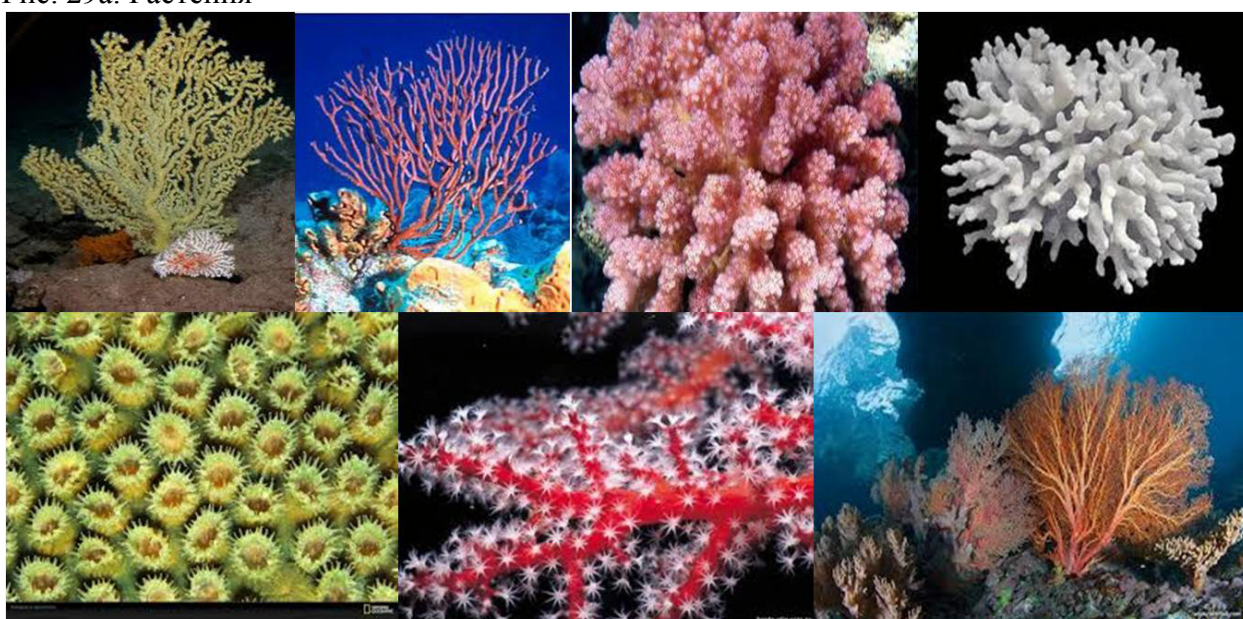


Рис. 29б. Кораллы

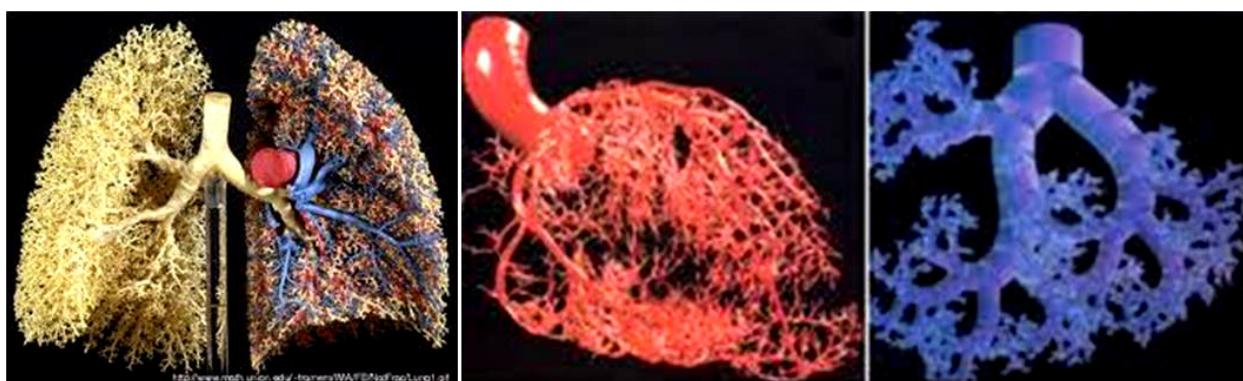


Рис. 29в. Некоторые органы человека.

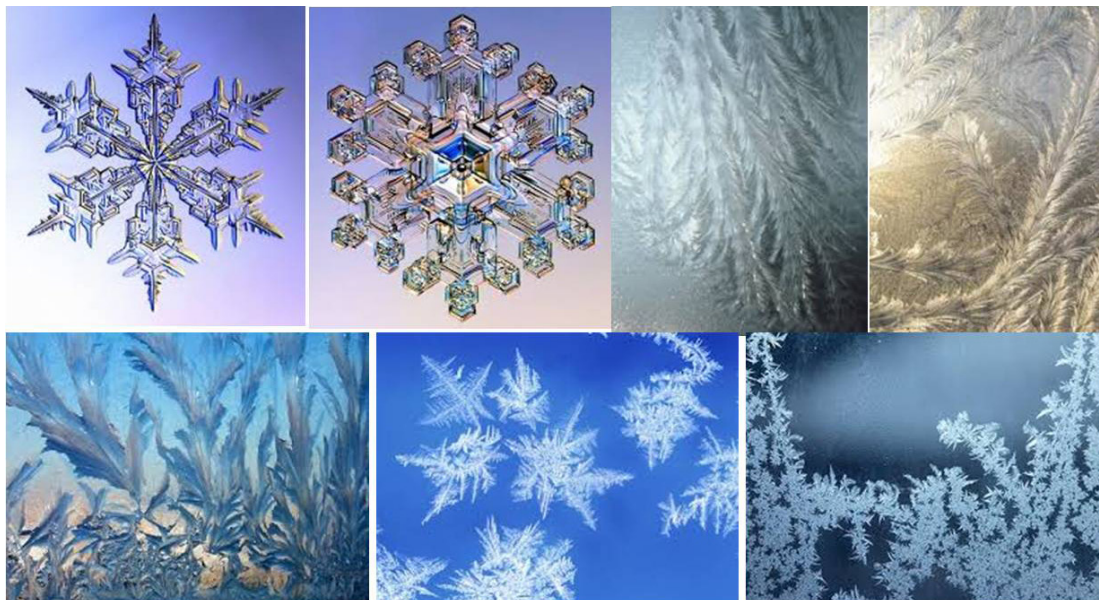


Рис. 29г. Узоры на стекле.



Рис. 29д. Дендриты.



Рис. 29е. Молнии.



Рис. 29ж. Волны.

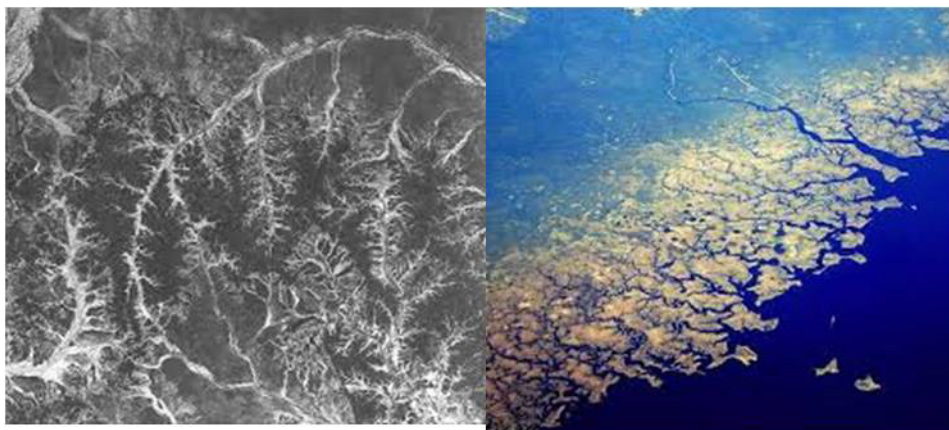


Рис. 29з. Долина реки и побережье.



Рис. 29и. Горы.



Рис. 29к. Облака.

Интересно сравнить эти фото и картинками, получаемыми расчётами на компьютере в использовании геометрии фракталов (рис. 30). Сходство довольно очевидно. Поэтому можно ожидать, что фракталы позволят дать математическое описание намного более широкого класса природных объектов, чем это позволяют геометрии Эвклида, Римана и Лобачевского. Действительно, примеров применения фракталов уже сейчас довольно много. Мы остановимся только на нескольких примеров

Рассмотрим проблему анализа извилистости береговой линии (рис. 31). Линия раздела двух взаимодействующих сред (моря и суши) крайне изломана. Её иногда называют лезвием хаоса. На рис. представлено побережье Норвегии, а на рис. - способ измерения степени гладкости побережья. Прямолинейность графика чётко доказывает, что изучаемый объект - фрактал. По тангенсу угла наклона находим показатель фрактала D .

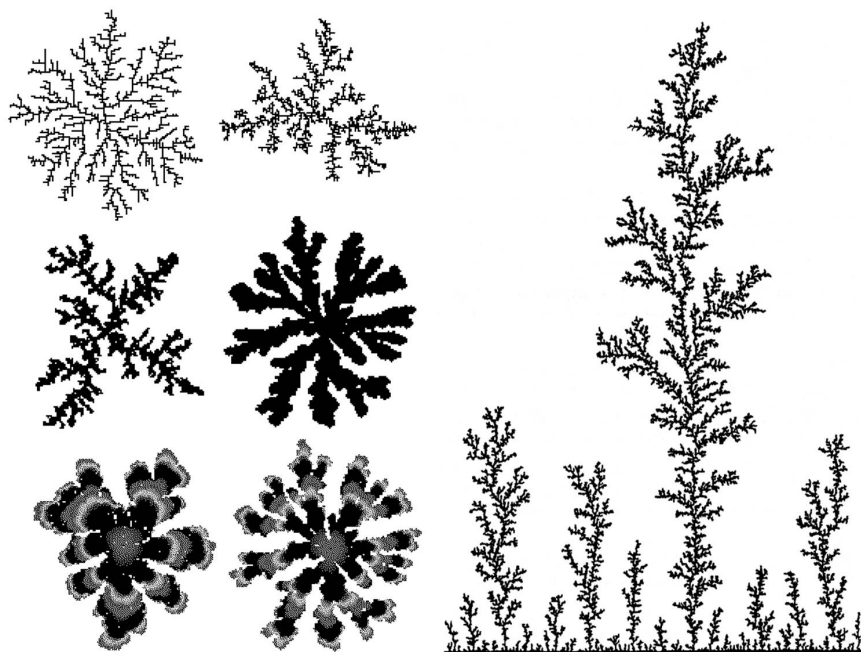


Рис. 30а. Модель дендритов.

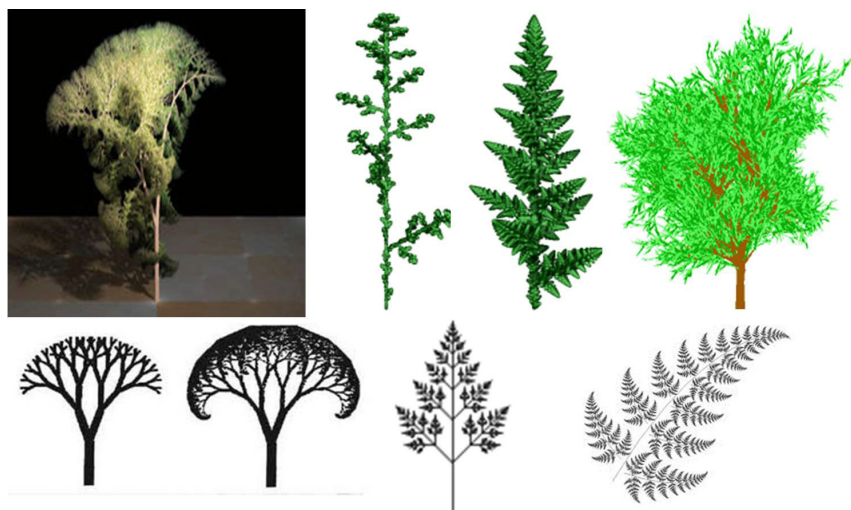


Рис. 30б. Фрактальные деревья.

БРОУНОВСКИЕ АРХИПЕЛАГИ

поверхность $d=8/3$
береговая линия $d=5/3$

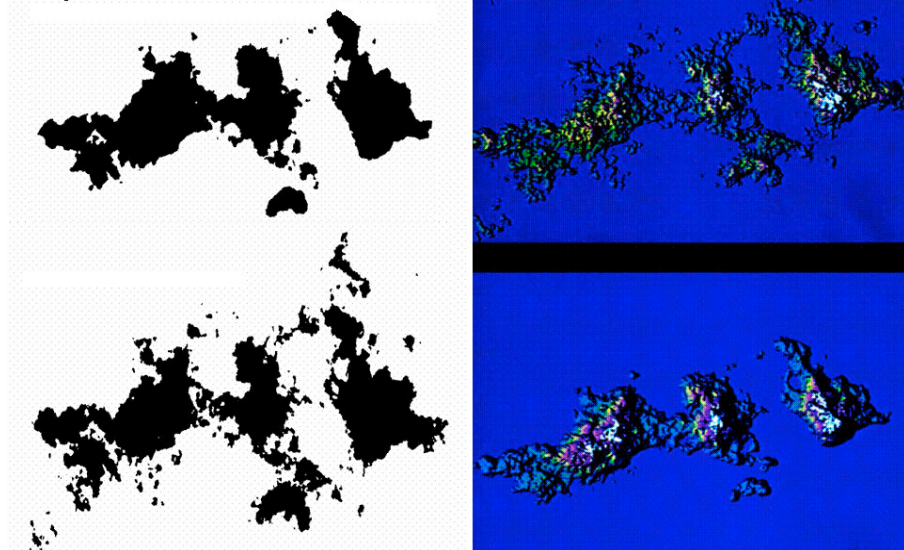


Рис. 30в. Моделирование броуновского движения.

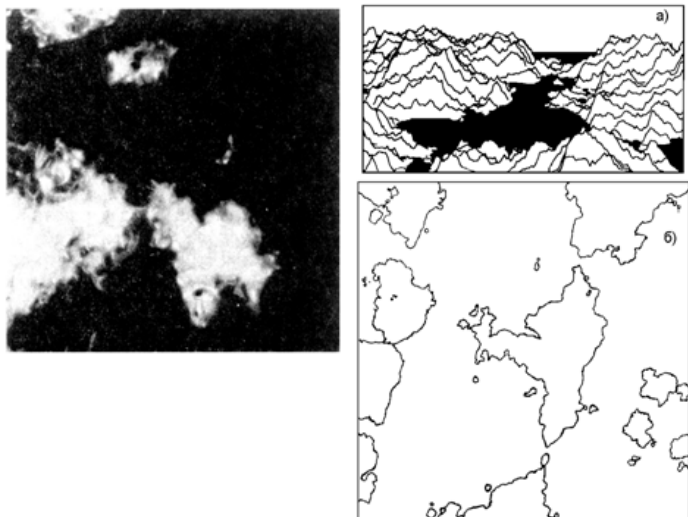


Рис. 30г. Облака и горы с озёрами.



Рис. 30д. Горные пейзажи.

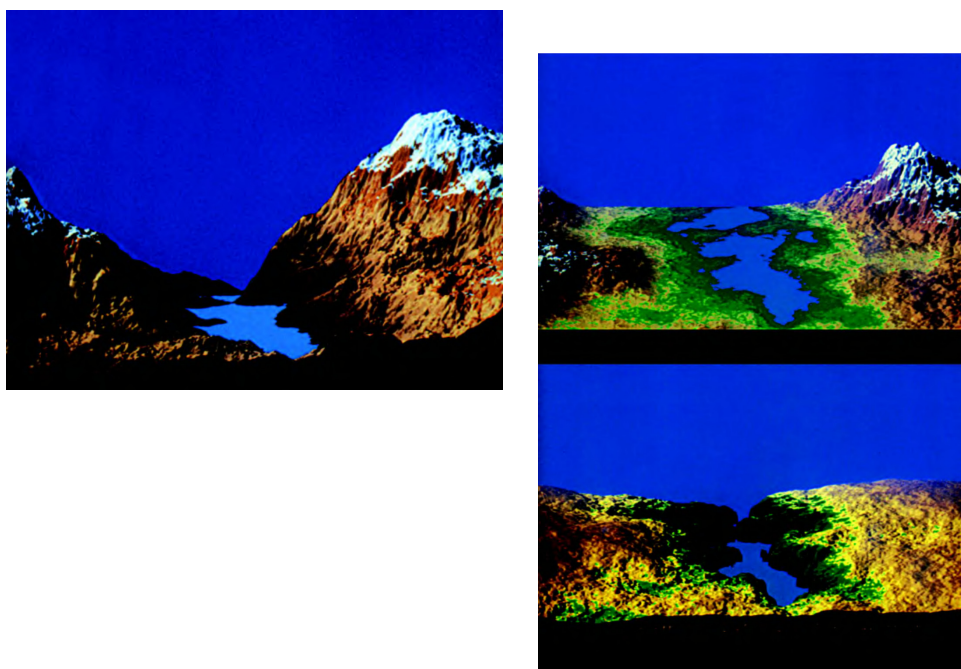


Рис. 30е. Фрактальное моделирование гор и озёр.

Аналогичным образом можно описать побережье и других морей (рис.). Не все они фрактальны, но обычно можно выбрать участки, в которых фрактальность более-менее соблюдается (прямолинейный участок на графиках). По величине показателя фрактала можно судить о наличии бухт, в которых можно

укрыться в непогоду (в Белом море их много, а на Каспийском море практически нет). Это важно для безопасности мореходства. Поэтому сейчас во всех лоция указаны фрактальные размерности побережий озёр, морей и океанов.



Рис. 31. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия представлена в цифровом виде с помощью раstra, состоящего примерно из 1800×1200 . Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta = 50$ км.

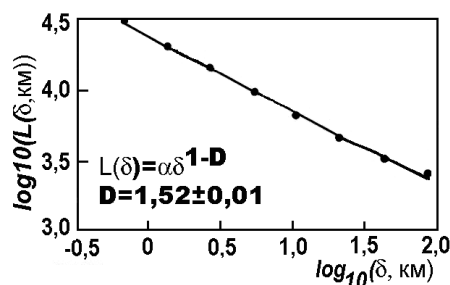


Рис. 32. Измеренная длина береговой линии, изображенной, как функция шага δ (км) — длины стороны $\delta \times \delta$ квадратных ячеек, образующих покрытие береговой линии на карте. Прямая на графике в дважды логарифмическом масштабе соответствует зависимости $L(\delta) = \alpha \delta^{1-D}$, где $D = 1,52$.

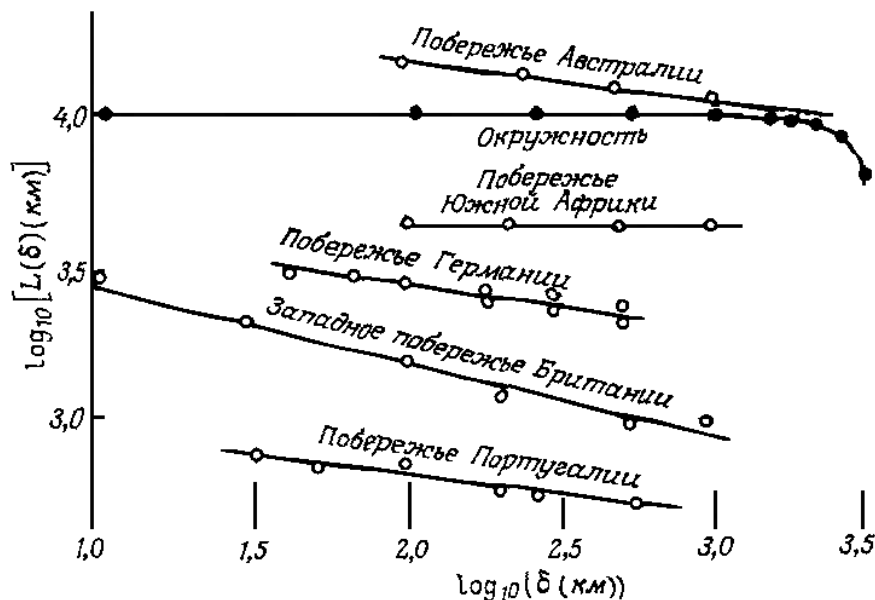
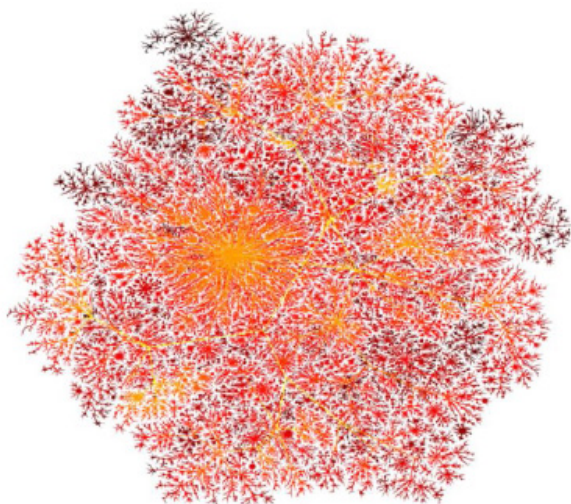


Рис. 33 Длина береговых линий морей как функция выбранного шага δ (км).



Другой сферой широкого применения геометрии фракталов является информатика, сеть Интернет и компьютерные науки. Например, Интернет может быть представлен как масштабная (network) или деревоподобная решётка. В этом пространстве точки являются коастерами, которые в свою очередь представляют из себя масштабно-инвариантные сети (например, сеть Интернет). Кстати, аббревиатура WWW - "всемирная паутина" имеет также смысл Worlds Within Worlds - "миры внутри миров".

Рис. 34. Масштабно инвариантная сеть.

Вселенная существует в условиях детерминированного хаоса, поэтому фрактал постепенно становится средством его адекватного описания. Фрактальные алгоритмы нашли применение в

информационных технологиях, например, для синтеза трехмерных компьютерных изображений природных ландшафтов, а также для сжатия данных.

При этом следует учесть, что в природе встречаются неоднородные объекты, требующие использование сложных структур, таких как мультифракталы. Так, мультифрактальный анализ применяется:

- при описании структурного распределения неоднородных звездных скоплений в астрофизике;
- при исследовании агрегатных свойств клеточных элементов крови в биологии;
- для характеристики основных этапов эволюции ансамбля дислокаций и усталостного разрушения материалов в физике металлов;
- в теории развитой турбулентности;
- в квантовой механике;
- в физике элементарных частиц;
- при изучении распределений сбоев в компьютерных сетях;
- при анализе колебаний курса валют в экономике;
- для анализа литературы.

Их мы обсудим в следующих лекциях.