

Лекция 2. Примеры теории катастроф

Оглавление

- 2.1 Иллюстрации теории катастроф
- 2.2 Машина катастроф Зимана
- 2.3 Качалки
- 2.4 Механика конструкций
- 2.5 Геометрия жидкости
- 2.6 Оптика и теория рассеяния
- 2.7 Термодинамика и фазовые переходы
- 2.8 Биология и экология
- 2.9 Экономика
- 2.10 Психология
- 2.11 Социологическое моделирование

Приложение: [Комикс "Тайны катастроф" \(И.Стюарт\)](#)

Теория особенностей дифференцируемых отображений, получившая широкую известность под эффектным названием "теория катастроф", нашла применение в механике конструкций, метеорологии, аэро- и гидродинамике, оптике, теории кооперативных явлений, квантовой динамике, устойчивости кораблей, эмбриологии, социологии, лингвистике, экспериментальной психологии, экономике, геологии, теории элементарных частиц, а также в исследовании биений сердца, моделировании деятельности мозга, психических расстройств и т. п. Эта теория используется в исследовании возбуждения нервного волокна, перехода ламинарного течения в турбулентное, потери человеком самообладания, превращения жидкости в пар, деления биологических клеток, краха биржи и т.д. Теория катастроф подводит стандартную базу под описание качественных изменений в нелинейных уравнениях, моделирующих системы, далекие от равновесия. Она является основой анализа в теории бифуркаций, в теории переходов термодинамических систем в новые структурные состояния.

В данной лекции мы опишем некоторые простые устройства, наглядно демонстрирующие эффект "катастрофы", и проиллюстрируем некоторые возможные направления применения теории катастроф. Строгий анализ практически важных ситуаций будет дан в последующих лекциях. Там же будут рассмотрены другие важные применения катастроф (аэродинамика, квантовая механика, лазерная физика, турбулентность и др.), которые оказались за рамками этой лекции.

В качестве иллюстрации рассмотренных здесь случаев, в приложении приведён комикс ["Тайны катастроф" И.Стюарта](#).

2.1 Иллюстрации теории катастроф

Некоторые аспекты теории катастроф можно иллюстрировать практически важными примерами. В данной лекции мы будем ориентироваться на элементарные катастрофы Тома, классификация которых представлена в табл.1 и 2.

Как уже упоминалось, различия в начальных условиях рождают огромную разницу конечных явлений, так что предсказание будущего становится невозможным; неожиданно возникающие свойства и поведение системы не могут быть поняты путём исследования её частей, при последовательных бифуркациях эволюция системы необратима и т.п. Необратимые процессы в открытой системе переводят её в хаос (как и в закрытой системе, в которой энтропия всегда растёт). В открытой системе, в отличие от закрытой, возможно возникновение новой системы с высоким уровнем организации, например, диссипативной структуры (бифуркация уменьшает энтропию - процесс, возможный только в открытой системе). Таким образом, система может претерпевать превращения: порядок I ® беспорядок ® порядок II). Вероятно именно так из неживой природы возникла живая.

Табл.1. Элементарные катастрофы Тома.

Тип катастрофы	k	Росток	Возмущение
A_2	1	x^3	a_1x
$A_{\pm 3}$	2	$\pm x^4$	$a_1x + a_2x^2$
A_4	3	x^5	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
$A_{\pm 5}$	4	$\pm x^6$	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
A_6	5	x^7	$a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$
D_{-4}	3	$x^2y - y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_{+4}	3	$x^2y + y^3$	$a_1x + a_2y + a_3y^2$
D_5	4	$x^2y + y^4$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2$
D_{-6}	5	$x^2y - y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
D_{+6}	5	$x^2y + y^5$	$a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5y^3$
$E_{\pm 6}$	5	$x^3 \pm y^4$	$a_1x + a_2y + a_3xy + a_4y^2 + a_5xy^2$

Табл. 2. Канонические формулы потенциала в теории катастроф.

k	n	Каноническая форма $f(x, a)$	Название
1	1	$x_1^3 - ax_1$	Складка
2	1	$x_1^4 + a_1 \frac{x_1^2}{2} + a_2x_1$	Сборка
3	1	$\frac{x_1^5}{5} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3x_1$	Ласточкин хвост
4	1	$\frac{x_1^6}{6} + a_4 \frac{x_1^4}{4} + a_1 \frac{x_1^3}{3} + a_2 \frac{x_1^2}{2} + a_3x_1$	Бабочка
3	2	$x_1^3 + x_2^3 + a_3x_1x_2 - a_1x_1 - a_2x_2$	Гиперболическая омбилическая точка
3	2	$x_1^3 - 3x_1x_2^2 + a_3(x_1^2 + x_2^2) - a_1x_1 - a_2x_2$	Эллиптическая омбилическая точка
4	2	$x_1^2x_2 + x_2^4 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 - a_1x_1 - a_2x_2$	Параболическая омбилическая точка
5	1	$x_1^7 + a_1x_1^5 + a_2x_1^4 + a_3x_1^3 + a_4x_1^2 + a_5x_1$	Вигвам
5	2	$x_1^2x_2 - x_2^5 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_1^2 + a_4x_2 + a_5x_1$	Вторая эллиптическая омбилическая точка
5	2	$x_1^2x_2 + x_2^5 + a_1x_2^3 + a_2x_2^2 + a_3x_1^2 + a_4x_2 + a_5x_1$	Вторая гиперболическая омбилическая точка
5	2	$1 \pm (x_1^3 + x_2^4 + a_1x_1x_2^2 + a_2x_2^2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2 + a_5x_1)$	Символическая омбилическая точка

В открытых системах могут наблюдаться сложные, длительные хаотичные переходные режимы, скрытый порядок которых невозможно выявить без знания его алгоритма. Возможность существования «ложного» хаоса иллюстрируется «возвращением Пуанкаре» (рис. 1): изображение, переведённое в цифровую форму, растягивается по диагонали, выходящие за пределы рамки участки отрезаются и вставляются вновь; после определенного числа таких преобразований распознаваемое изображение исчезает, а затем вновь возникает из казалось бы полного хаоса.

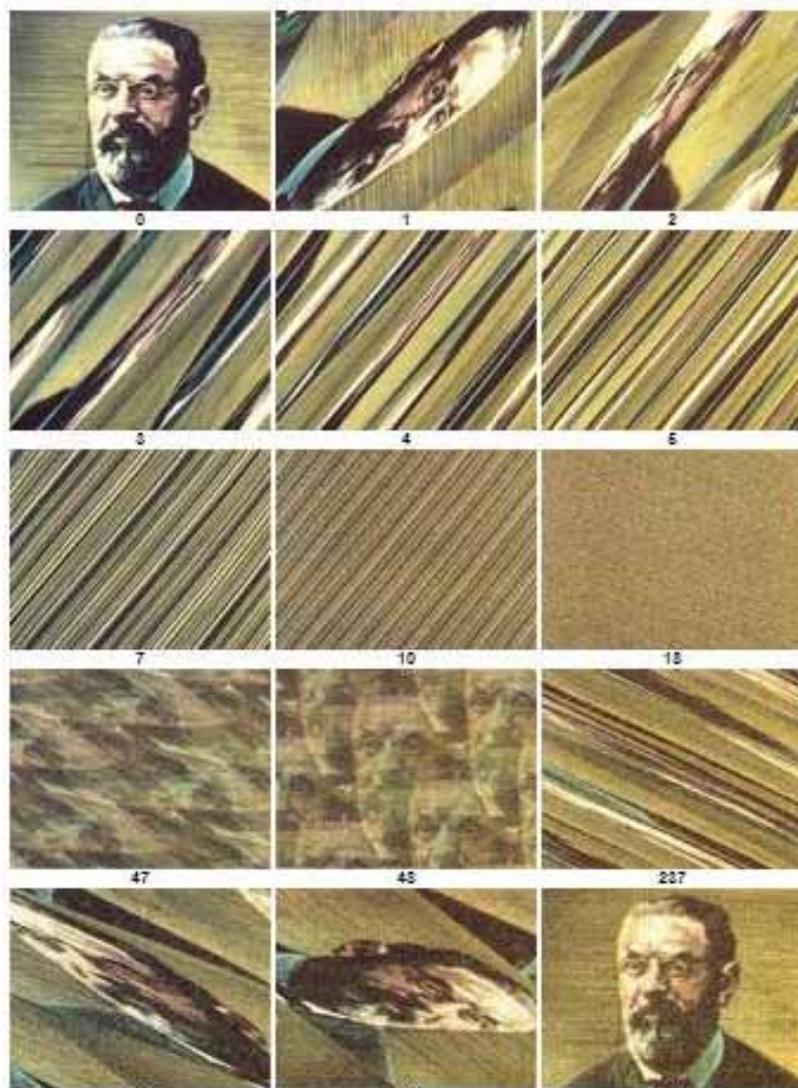


Рис. 1. Хаос, созданный применением геометрической операции растяжения. Эффект растяжения проиллюстрирован на примере портрета французского математика Анри Пуанкаре, основоположника теории динамических систем. Исходное изображение (*вверху слева*) было преобразовано в цифровую форму. Математическое преобразование растягивает изображение по диагонали, как будто оно нарисовано на резиновой поверхности. Там, где изображение вылезает за рамки исходного, оно обрезается и вставляется с другой стороны, как показано на кадре 1. (Номер кадра указывает на количество выполненных преобразований.) После повторных применений преобразования разобрать лицо уже невозможно (кадры 2–4). В конечном счёте, появляется случайная комбинация цветов, дающая равномерное зелёное поле (кадры 10 и 18). Иногда случается так, что некоторые точки возвращаются к своему исходному положению, и тогда на короткое время проявляется исходное изображение (кадры 47–48, 239–241). При типичном хаотическом преобразовании такое возвращение осуществляется чрезвычайно редко. При наличии ничтожных фоновых флуктуаций время между возвращениями обычно столь велико, что вся информация об исходном изображении утрачивается.

Довольно часто катастрофы встречаются в восприятии; это связано с существованием двусмысленных, или "мультистабильных", фигур. Например, среди фигур, показанных на рис. 2а, четвёртая слева в верхнем ряду воспринимается с равной вероятностью как мужское лицо и как фигура девушки. Интересно, что если эта фигура включена в последовательность (верхний ряд на рис. 2а), то восприятие средних фигур сдвигается в зависимости от порядка, в котором эта последовательность рассматривается: в сторону мужчины, если фигуру рассматривать слева направо, и в сторону девушки в противном случае.

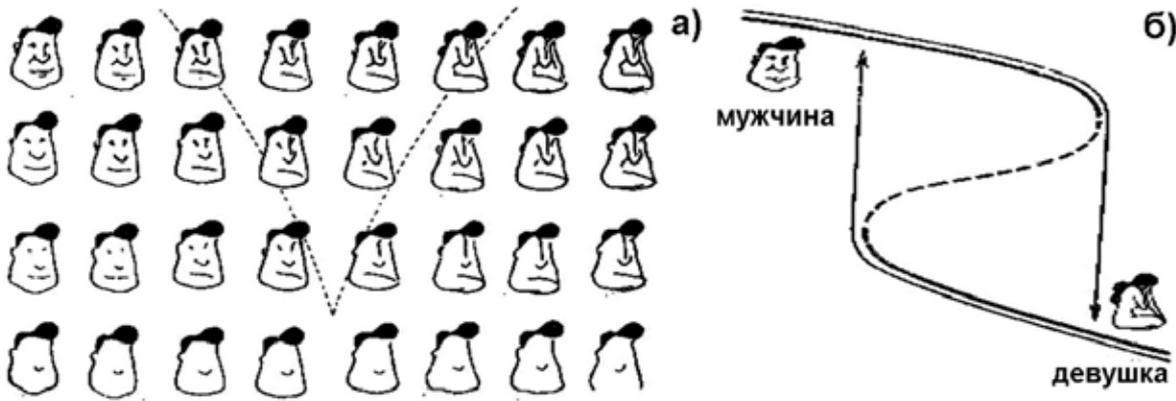
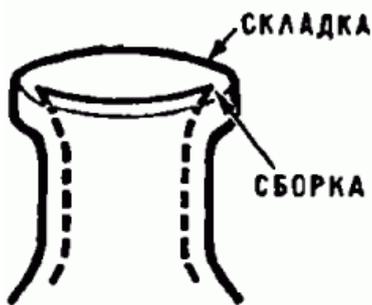


Рис. 2. Катастрофы в восприятии.



На рис. 2б представлено одномерное сечение катастрофы сборки с принципом промедления.

Рис. 3. Экспериментальное наблюдение сборки Уитни. На поверхности бутылки можно увидеть две сборки. Они устойчивы, в чём можно убедиться, покачивал бутылку.

Заметим, что отображения гладких поверхностей на плоскость часто встречаются в реальных ситуациях. Действительно, большинство окружающих нас тел ограничено гладкими поверхностями, при этом видимые контуры тел являются проекциями поверхностей, ограничивающих тела, на сетчатку глаза.

Приглядываясь к окружающим нас телам, например, к лицам людей, можно изучить особенности видимых контуров. Например, точки сборки обнаруживаются в чертах людей там, где линия контура «исчезает» (рис. 4). При этом видно, что линия контура имеет касательную вплоть до точки сборки, но с приближением к этой точке кривизна линии растет до бесконечности.



Рис. 4. Сборка и складка на лице человека.

2.2 Машина катастроф Зимана

Скачкообразный переход количества в качество, при котором непрерывно меняющиеся причины приводят к резким, прерывно меняющимся следствиям, т.е. когда ничтожное изменение начального состояния приводит к мгновенному, заранее непредсказуемому результату, наглядно демонстрирует "машина катастроф" Э.Зимана.

Эта машина состоит из диска, вращающегося вокруг вертикальной оси. К одной из точек на периферии диска прикреплены две резиновые нити. Свободный конец одной из нитей жёстко закреплен в точке Q , а свободный конец другой – P – может свободно перемещаться в плоскости, параллельной плоскости диска. Карандаш, прикрепленный к резинке в точке P рисует на бумаге, лежащей на дощечке. Перемещая карандаш, осуществляют вращение диска, так что состояние системы описывается положением карандаша и диска. Если P плавно перемещать вне ромбовидной области, диск будет плавно поворачиваться в ту или в другую сторону. Но когда P попадает в область $ABCD$, положение меняется. Предположим, точка P движется по линии $UVWXYZ$ слева направо. При медленном движении точки диск плавно поворачивается. Но вот когда P выходит из ромба в точке Y , диск резко, скачком меняет угол поворота. Но когда P начинает перемещаться в обратном направлении по той же прямой, в точке Y никакого скачка не происходит! Он появляется на этот раз в точке V , там, где P выходит из ромба. Таким образом, поведение диска не меняется на прямо противоположное, когда P проходит прежний путь $ZYXWVU$ в обратном направлении. Когда P попадает в любую точку, находящуюся вне ромбовидной области $ABCD$, у диска есть только одно

положение устойчивого равновесия. Когда же P попадает внутрь этой области, устойчивых положений уже два.

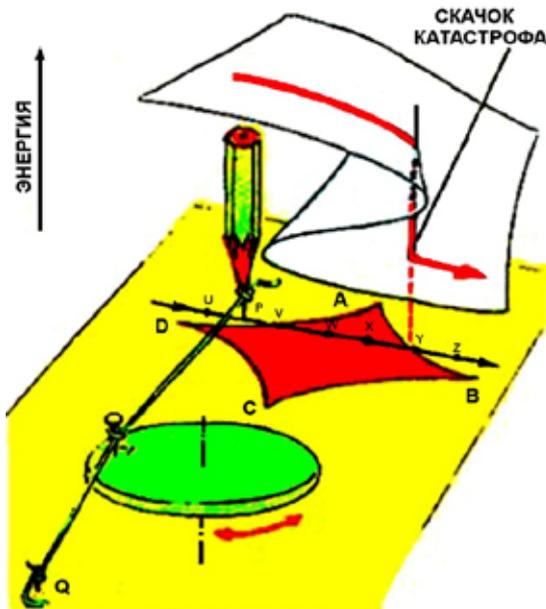


Рис. 5. Машина катастроф Зимана.

Таким образом, при изменении положения карандаша (два внешних параметра), колесо поворачивается, плавно отслеживая изменение параметров, но в некоторых случаях меняет своё положение скачком. Такие скачки происходят при исключительных («бифуркационных») положениях карандаша: они образуют на листе бумаги «кривую катастроф» с четырьмя точками возврата. При пересечении кривой катастроф катастрофа (скачок колеса) может произойти, а может и не произойти, в зависимости от предыстории.

Для математического анализа работы такого устройства используется трёхмерное пространство, в котором по вертикальной оси откладывается энергия равновесных положений диска X , а по горизонтальным осям – координаты точки P . Возникает поверхность со складкой, изображающая собой совокупность всех равновесных положений диска. Проекция складки на плоскость образует часть ромбовидной области, примыкающей к точке A . Когда P находится вне заштрихованной области, каждому её положению соответствует одно-единственное значение X и одна-единственная точка на поверхности: состояние системы здесь описывается однозначной функцией. Но когда P оказывается внутри заштрихованной площади, одному положению P соответствуют три значения X на разных частях складки. Функция здесь перестает быть однозначной.

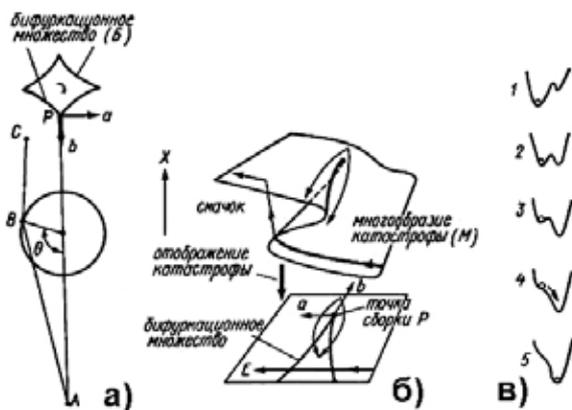
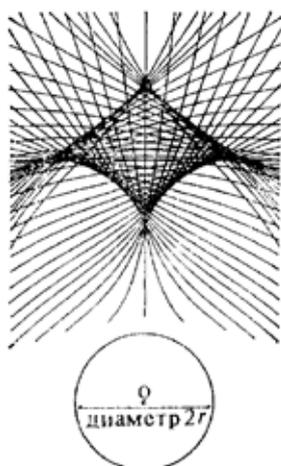


Рис. 6. а – машина Зимана; б – геометрия катастрофы сборки; в – графики функции потенциальной энергии U_{ab} .

Так называемая «катастрофа» Тома. При движении P в обратном направлении – справа налево – X перемещается плавно по нижней поверхности складки, пока не достигнет её края. Дальнейшее изменение координаты приводит снова к «катастрофе» – скачку с нижнего на верхний уровень. Эта простейшая модель, в которой энергия равновесия зависит всего от двух независимых переменных – координат точки P .

Такая модель хорошо объясняет поведение диска. При движении P слева направо X движется вдоль гладкой поверхности до тех пор, пока не достигается край перегиба. Дальнейшее нарастание координаты приводит к резкому перескоку X с верхнего на нижний уровень –



Состояние машины катастроф описывается тремя числами. Положение острия карандаша задаётся двумя координатами (они называются управляющими параметрами). Положение диска определяется ещё одним числом - углом поворота (внутренний параметр системы - управляемый параметр). Если все три числа заданы, и определены степени растяжения резинок, то определена потенциальная энергия всей системы. Диск поворачивается так, чтобы эту энергию минимизировать. При фиксированном положении карандаша потенциальная энергия — функция от положения диска, т. е. функция, заданная на окружности. Эта функция может иметь в зависимости от значений управляющих параметров один или несколько минимумов.

Рис. 7. Линии, рисуемые карандашом в машине катастроф.

Если при изменении управляющих параметров положение минимума меняется плавно, то скачка не происходит. Скачок происходит при тех значениях управляющих параметров, для которых локальный минимум исчезает, слившись с локальным максимумом; после скачка диск оказывается в положении, отвечающем другому локальному минимуму. Состояния, при которых диск находится в равновесии, образуют в трёхмерном пространстве состояний машины гладкую поверхность. Если проектировать эту поверхность на плоскость управляющих параметров вдоль оси внутреннего параметра, то получится следующая проекция (складка) – кривая катастроф. На рис. 8 ясно видно, почему переход управляющих параметров через линию катастроф иногда вызывает, а иногда не вызывает скачок (это зависит от того, какой части поверхности отвечает положение диска). Пользуясь этим рисунком можно переходить с одного места поверхности равновесий на другое без скачков.

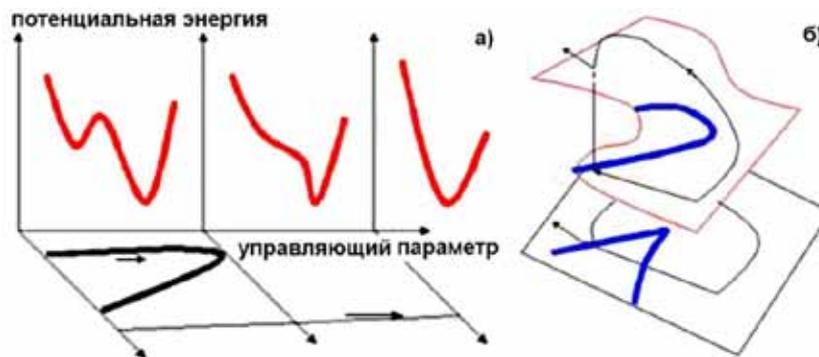


Рис. 8. а – потенциальная энергия машины катастроф; б – поверхность равновесий машины катастроф.

Замечание. Кривая катастроф - проекция на плоскость сборки Уитни. Хотя сама поверхность геометрически не видна, и представляет собой поверхность в абстрактном пространстве состояний системы, всё же проекция особенности этой поверхности может быть наглядно изображена в виде кривой катастроф в левой части доски. Невидимое обнаруживает себя в видимом.

Теория особенностей позволяет объяснить поведение машины и предсказать, в каких случаях «катастрофа» произойдет, а в каких нет. Пространство состояний машины трехмерно (два внешних параметра определяют положение карандаша, один внутренний — угол поворота колеса). Потенциальная энергия системы является функцией этих трёх переменных (по углу она периодична). При фиксированных значениях внешних параметров система минимизирует потенциальную энергию (локально). Возникающая зависимость между значениями внутренних и внешних параметров изображается в трёхмерном пространстве двумерной *поверхностью равновесий*. Поверхность равновесий образована критическими точками потенциальной энергии, рассматриваемой как функция внутреннего параметра при фиксированных значениях внешних. Эти критические точки при всевозможных значениях внешних параметров образуют поверхность в пространстве-произведении. Поверхность равновесия машины Зимана гладкая и расположена общим образом относительно проектирования на плоскость внешних переменных. Отображение проектирования имеет особенностями *складки* и *сборки Уитни* (а именно, 4 точки сборки, проектирующиеся в точки возврата кривой катастроф).

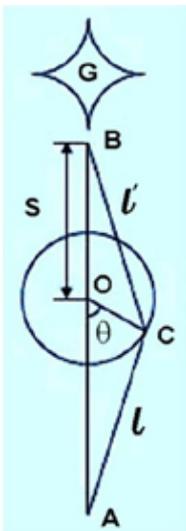


Рис. 9. К математической модели машины катастроф.

При подходе значений внешних параметров к кривой катастроф критические точки потенциальной энергии как функции на окружности перестраиваются. При пересечении кривой катастроф в её точке общего положения сливаются две критические точки потенциальной энергии — локальный максимум и локальный минимум. Система, находящаяся в устойчивом состоянии равновесия в точке локального минимума потенциальной энергии, остаётся в нём до момента бифуркации. В этот момент критическая точка становится неустойчивой, и система скачком переходит в другое состояние равновесия (отвечающее

другому минимуму потенциальной энергии). Таким образом, будет ли скачок при пересечении линии катастроф, зависит от того, в каком из локальных минимумов потенциальной энергии находилась система до пересечения. В точке возврата линии катастроф сливаются три «листа» поверхности равновесий (два крайних отвечают локальным минимумам, а средний — локальному максимуму потенциальной энергии). Зная из теории Уитни, как эти листы переходят друг в друга вблизи точки сборки, легко прогнозировать скачки при различных путях обхода точек возврата кривой катастроф.

При математическом описании действия машины катастроф возьмём в качестве единицы длины диаметр диска, так что длины нерастянутых резинок равны 1, $OC=0,5$, $OA=2$. Начнём с определения положения карандаша P . Когда точка B перемещается вдоль оси, всегда имеется положение равновесия, отвечающее $q=0$. Точка P находится там, где это равновесие меняется с устойчивого (локальный минимум энергии) на неустойчивое (локальный максимум). Пусть l и l' — длины резинок в положении, когда диск повернут на угол q , близкий к 0, но не обязательно равный 0.

Потенциальная энергия системы:

$$U_s(q) = \frac{k(l-1)^2}{2} + \frac{k(l'-1)^2}{2}, \quad (11)$$

где k — константа в законе Гука (модуль упругости резинок).

По теореме Пифагора

$$l^2 = (OA - OC \cos q)^2 + (OC \sin q)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos q + \frac{1}{4} \sin^2 q \quad (12)$$

Будем полагать, что угол q мал и воспользуемся разложениями

$$\sin q = q + O(q^3), \quad \cos q = 1 - \frac{q^2}{2} + O(q^4) \quad (13)$$

Тогда

$$l^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos q + \frac{q^2}{4} + O(q^4) = \frac{9}{4} + q^2 + O(q^4) \quad (14)$$

$$l = \frac{3}{2} + \frac{q^2}{3} + O(q^4). \quad (15)$$

Совершенно аналогично

$$l'^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos q - \frac{S q^2}{2(2S+1)} + O(q^4). \quad (16)$$

Выражение для потенциальной энергии принимает вид:

$$U_s(q) = \frac{k}{4} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos q \right)^2 + \frac{k}{4} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos q - \frac{S q^2}{2(2S+1)} \right)^2 + O(q^4). \quad (17)$$

Лемма Морса: В выражении для потенциальной энергии можно пренебречь членами порядка $O(q^4)$, если коэффициент при q^2 отличен от нуля.

Основываясь на лемме Морса, можно сделать вывод, что потенциальная функция имеет минимум только тогда, когда множитель при квадратном члене положителен. Потенциальная энергия имеет максимум только тогда, когда коэффициент при квадратичном члене отрицателен. Условие изменения состояния равновесия определяется уравнением

$$\frac{1}{3} = \frac{S(2S-1)}{2(2S+1)}; \quad 6S^2 - 7S - 2 = 0; \quad S = \frac{7 + \sqrt{97}}{12} \approx 1,404071483. \quad (18)$$

Аналогичное рассуждение с заменой $q=0$ на $q=p$ позволяет определить положение верхнего клюва P' для которого

$$S = \frac{27 + \sqrt{489}}{20} \approx 2,46. \quad (19)$$

В более подробном анализе учитывается отброшенный ранее член с q^4 . Тогда потенциальная энергия приобретает вид

$$U_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx, \quad (20)$$

где величины a и b не имеют принципиального значения.

Это – катастрофа сборки.

2.3 Качалки

Рассмотрим простой пример физической системы, склонной к потере устойчивости – параболическую качалку. Простейшая качалка изготавливается путём вырезания двух кусков картона в форме параболы и скреплением их между собой (рис. 10). Прикрепим к ней грузик. Качалка наклонится и займёт некоторое положение равновесия. Если мы её толкнём, то она, либо займёт новое положение равновесия, либо вернётся в исходное. Если качалка находится в положении равновесия, то центр тяжести расположен точно по вертикали над точкой опоры. Когда качалка покоится на горизонтальной плоскости, эта плоскость будет касательной к параболе, так что центр тяжести лежит на соответствующей нормали (прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно к касательной). Некоторые из этих нормалей изображены на рис. 10.

Где бы не располагался центр тяжести на нормали, построенной в заданной точке, центр тяжести окажется над этой точкой и качалка с опорой на эту точку будет находиться в равновесии. Однако при одних положениях центра тяжести на этой нормали качалка после малых отклонений будет возвращаться в положение равновесия (т.е. равновесие устойчиво), а при других она будет падать, как яйцо, поставленное на острый конец (равновесие неустойчиво).

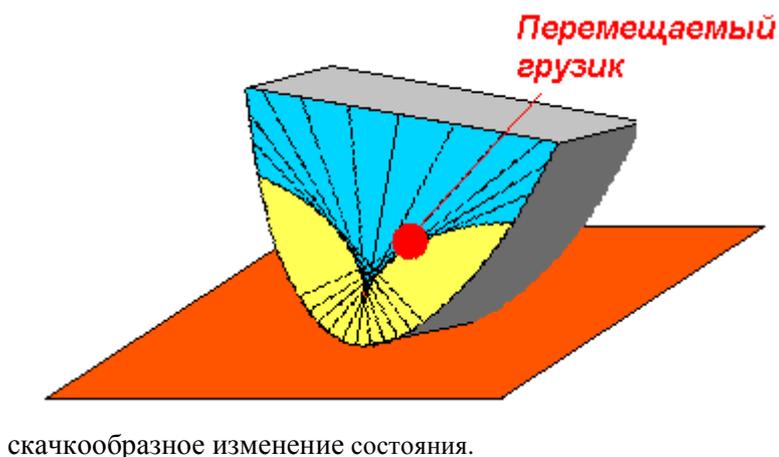
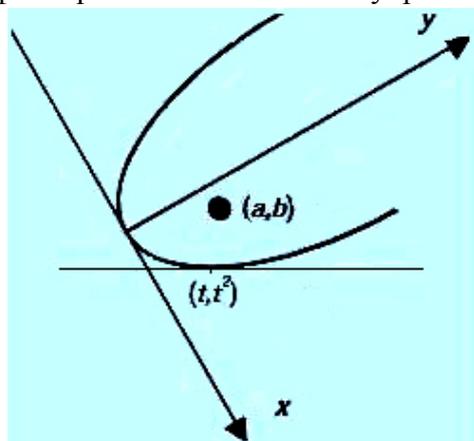


Рис. 10. Параболическая качалка: управляющие параметры – координаты грузика, показанного красным кружком. Нанесены нормали – прямые, проходящие через точку касания перпендикулярно плоскости стола. При выходе из желтой области происходит “катастрофа” – скачкообразное изменение состояния.

Можно рассчитать, сколько положений равновесия имеет параболическая качалка при различных положениях грузика и определить, как будет меняться положение равновесия, если непрерывно менять положение грузика. В результате можно предсказать, когда малое изменение в положении центра тяжести приведёт к новому положению равновесия, лишь слегка отличающегося от первоначального, а когда оно приведёт к тому, что качалка начнёт катиться (катастрофа).

Параболическая качалка имеет один внутренний параметр q (угол между осью параболы и плоскостью стола) и два управляющих параметра a и b , задающих положения грузика. При фиксированных значениях управляющих параметров положения равновесия системы соответствуют



критическим точкам потенциальной энергии $V_{ab}(q)$. Таким образом, задано двухпараметрическое семейство функций $V_{ab}(x)$, и задача состоит в описании деформации множества критических точек $S = \{x | V_{ab}'(x) = 0\}$ функций семейства при изменении параметров (a, b) .

Рис. 11. Качалка и система координат, связанная с ней. В точке a, b сосредоточена основная масса.

Координаты центра масс – (a, b) , a и b – переменные управления, т.е. параметры, с помощью которых можно менять

состояние системы. Множество значений этих переменных образует пространство управления.

Рассмотрим поведение качалки при изменении положения центра масс (т.е. координат a, b).

Найдём уравнение касательной к точке (t, t^2) (рис. 11). Поскольку уравнение параболы $y=x^2$, то угловой коэффициент прямой $k=y'=2x$. Поскольку касательная должна проходить через точку (t, t^2) , то

$$t^2 = kt + b = 2t^2 + b \quad (21)$$

следовательно, $b = -t^2$

$$y = 2tx - t^2. \quad (22)$$

Расстояние от точки с координатами (a, b) до прямой $y = 2tx - t^2$ определяется выражением

$$S^2 = \frac{b^2 + 2bt^2 + t^4 + 4a^2t^2 - 4at^3 - 4abt}{1 + 4t^2} = \frac{(b - 2at + t^2)^2}{1 + 4t^2} \quad (23)$$

Тогда потенциальная энергия качалки

$$U(t) = mgS(t) = mg \frac{b - at + t^2}{\sqrt{1 + 4t^2}} \quad (24)$$

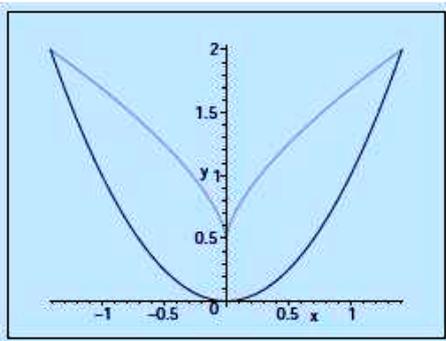


Рис. 12. Линия кратных корней в задаче "качалка".

Состояния равновесия качалки соответствуют экстремальным значениям потенциала. Для определения экстремумов продифференцируем потенциал и приравняем производную нулю.

$$\dot{U} = 2mg \frac{2t^3 + (1 - 2b)t - a}{(1 + 4t^2)^{3/2}} = 0. \quad (25)$$

Таким образом, состояниям равновесия соответствуют корни уравнения

$$2t^3 + (1 - 2b)t - a = 0 \quad (26)$$

Найдём теперь уравнение нормали к точке касания (t, t^2) . Уравнение должно иметь вид

$$y = -\frac{x}{2t} + c \quad (27)$$

$$\frac{c}{6} - \frac{1 - 2b}{3} \frac{1}{t} + a = 0. \quad \frac{c}{6} - \frac{1}{3} \frac{1}{t} + a = 0. \quad \frac{c}{6} - \frac{1}{3} \frac{1}{t} = -a \quad (28)$$

$$2(2b-1)^3 = 27a^2. \quad (29)$$

Это уравнение аналогично уравнению для машины катастроф, т.е. описывает каноническую сборку Уитни.

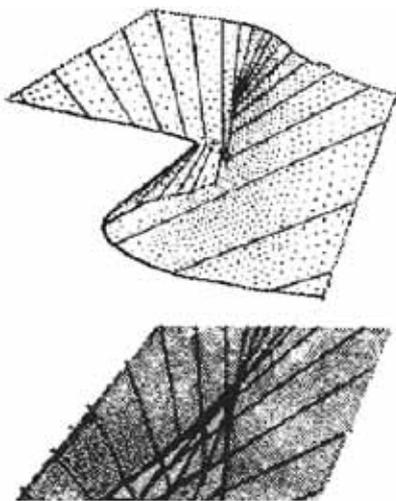


Рис. 13. Поверхность катастрофы для качалки.

Математический аппарат качалки использован при описании устойчивости кораблей (эту проблему мы подробно обсудим в одной из следующих лекций).

2.4 Механика конструкций

Изучение поведения статических конструкций под нагрузкой и их чувствительности к несовершенству тесно связано с теорией катастроф.

Задача описания поведения упругой конструкции, под воздействием увеличивающейся нагрузки внезапно, скачкообразно переходящей в другое положение (направление выгиба конструкции предсказать невозможно) имеет глубокие исторические корни. В 1744 г. Л.Эйлер использовал созданный им математический аппарат (вариационное исчисление) для определения равновесных состояний сжатой упругой колонны. В предположении о малости поперечных сечений он рассмотрел устойчивость прямолинейной формы равновесия вертикально расположенного линейно-упругого стержня, сжатого сжимающей силой (эластика Эйлера). Ж.Лагранж в 1788 г. доказал, что минимум полной потенциальной энергии системы является достаточным для

устойчивости. Он получил решение этой задачи без ограничений на величину поперечных отклонений и показал, что её математическое описание приводит к нелинейному дифференциальному уравнению.

В настоящее время крупногабаритную техническую конструкцию описывают с помощью потенциальной функции, минимальное значение которой определяет её устойчивое состояние. С увеличением нагрузки на конструкцию (мост, здание и т.д.) потенциальная функция изменяется. Значительная нагрузка может привести к потере устойчивости конструкции (т.е. к её разрушению) вследствие нарушения локально устойчивого состояния. Равновесие, устойчивость и потеря устойчивости - основные вопросы, рассматриваемые теорией катастроф, методы которой позволяют определить чувствительность критической, или разрушающей нагрузки, как к несовершенству конструкции, так и к динамическому воздействию. Кроме того, они оказываются эффективными при изучении составных систем, для которых возможны различные формы разрушения. Результаты исследования технических конструкций очень важны для их возведения, эксплуатации и разрушения. Теория катастроф используется при рассмотрении систем (составленных из нескольких конструктивных элементов), способных к неожиданным формам разрушения и обладающих жёсткой чувствительностью к несовершенству, если между элементами существует сильная связь. Примером является разрушение опорного кронштейна.

В качестве примера рассмотрим прогиб эйлера стержня под действием сжимающей нагрузки.

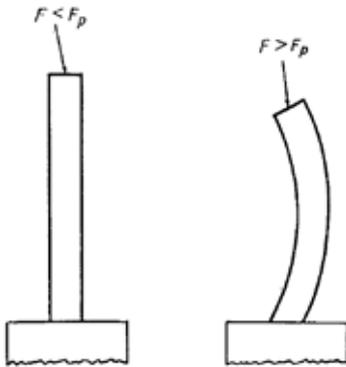


Рис. 14. Прогиб колонны при превышении критической нагрузки.

Пусть к одному концу идеального несжимаемого стержня приложена сила F (рис. 14), тогда если нагрузка (сила F), действующая на стержень, невелика, стержень остаётся прямым; при очень большой нагрузке F стержень сильно изгибается (предсказать, в какую именно сторону он изогнётся невозможно). Можно показать, что задача расчёта изгиба стержня в зависимости от силы F сводится к многообразию катастрофы сборки $x^3+ax+b=0$, так что устойчивость стержня вдоль кривых равновесия (рис. 15) определяется свойствами устойчивости катастрофы сборки.

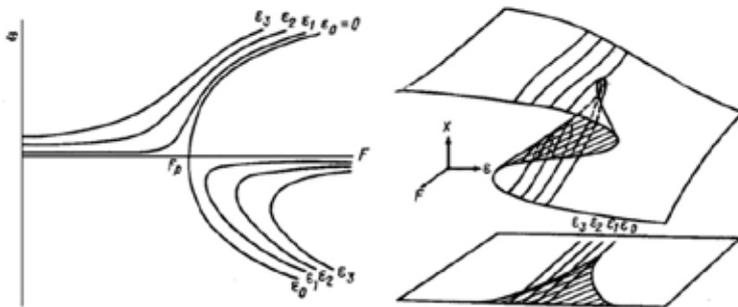


Рис. 15. Зависимость равновесной конфигурации несовершенного стержня от прилагаемой нагрузки и параметра несовершенства.

Выгибание нагруженного эйлера стержня аналогично фазовому переходу 2-го рода. Переход к выгнутому состоянию является "мягким", т.к. состояния системы до и после изгиба связаны непрерывным образом. Конструкции, демонстрирующие мягкий переход в изогнутое состояние, не разрушаются при превышении предельной нагрузки - они лишь умеренно изгибаются. Это позволяет сформулировать критерии определения пределов безопасных нагрузок и рассчитать максимальную несущую способность стержня.

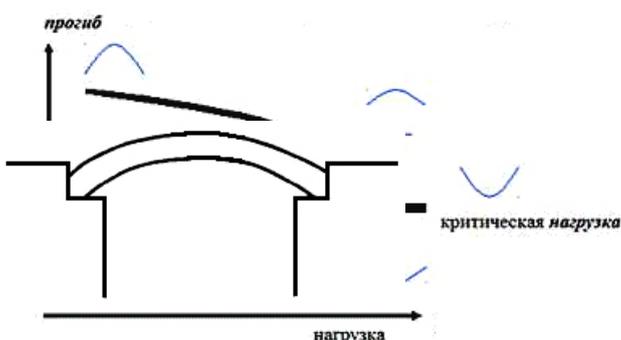


Рис. 16. Пологая арка - типичный элемент конструкции.

Работающие на сжатие балки - не единственные элементы конструкций. Для перекрытия мостовых пролетов эффективным является использование пологой арки (рис. 16). Если малые вертикальные нагрузки не вызывают деформации арки, то большие нагрузки приводят к её разрушению. Можно показать, что разрушающаяся арка описывается с помощью катастрофы двойной сборки.

Рис. 17. График зависимости прогиба линейки от приложенной к ней силы.

Рассмотрим проблему устойчивости конструкции на примере упругой пластмассовой линейки (или пилы - см. Комикс "Тайны катастроф" в Приложении). Если положить линейку на две опоры и ставить по очереди небольшие грузики на середину линейки, в какой-то момент времени линейка выгнется и сбросит грузики. Происходит катастрофа (постепенное изменение нагрузки вызвало внезапный ответ системы). График зависимости прогиба линейки от нагрузки приведён на рис. 17.

Рассмотрим зависимость упругой энергии линейки от её прогиба для пяти значений приложенной нагрузки (рис. 18).

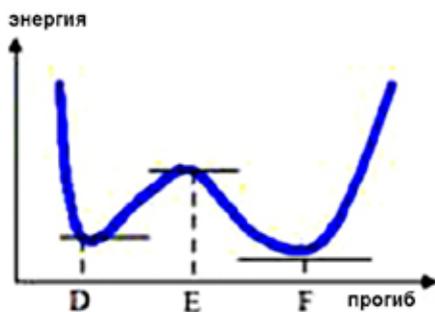


Рис. 18. Зависимость упругой энергии линейки от её прогиба.

Каждому возможному прогибу соответствует некоторая энергия. Состояние равновесия – это точки, которым на кривой зависимости энергии линейки от её прогиба соответствуют горизонтальные участки. При нулевой нагрузке зависимость имеет W-образную форму (рис. 18).



прогиб вверх увеличение нагрузки критическая нагрузка прогиб вниз

Рис. 19. Характер зависимости энергии от состояния.

Состояния, соответствующие точкам D и F , устойчивы, а состояние, соответствующее точке E , неустойчиво. Кривую можно разбить на три области: устойчивая, неустойчивая, устойчивая. Поэтому после того как линейка сбросила грузики, она прогнулась

вниз, так как для прогиба вверх она должна преодолеть энергетический барьер, а дополнительного воздействия извне в рассматриваемом случае нет.

Так как нет внешнего воздействия, благодаря которому система может преодолеть энергетический барьер, то система подчиняется правилу запаздывания (или промедления). Линейка может прогнуться вверх, если на нее действует сила, направленная вверх (отрицательная нагрузка). Такое явление называется гистерезисом. Зная характер зависимости прогиба от нагрузки, можно объяснить, почему линейка внезапно изменила свою форму: изменилось ее состояние – оно перестало быть устойчивым - произошла катастрофа.

2.5 Геометрия жидкости

Известная модель, используемая для изучения перехода к хаосу в потоке жидкости включает в себя два вращающихся в противоположных направлениях эксцентрических цилиндра. С увеличением скорости вращения внутреннего цилиндра наблюдается переход от постоянной скорости к периодически изменяющейся, и затем – к апериодическому режиму.

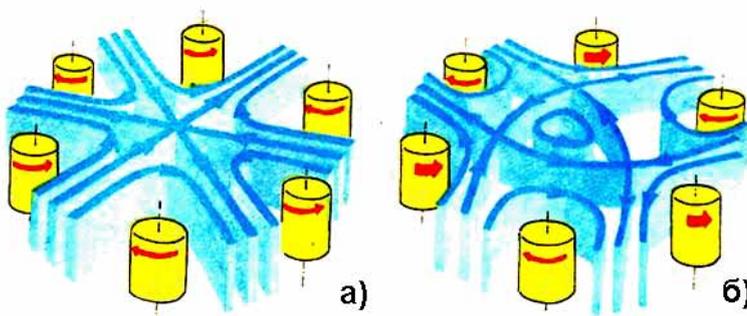


Рис. 20. Катастрофа в потоке жидкости.

Интересно поведение двумерного потока, создаваемого шестью симметрично расположенными, вращающимися навстречу друг другу роликами. Линии тока получаются такими, какие показаны на рис. а только в том случае, если скорость

вращения всех роликов одинакова. Малейшее отклонение в скоростях вращения приводит к «катастрофе» – скачкообразному изменению картины линий тока. Так, если все ролики, вращающиеся против часовой стрелки, увеличат свою скорость, картина мгновенно перестроится и станет такой, как показано на рис. 20б.

2.6 Оптика и теория рассеяния

Как мы уже упоминали в первой лекции, важным явлением в геометрической оптике является образование каустик, т.е. резких ярких кривых, которых касаются световые лучи.

В результате отражения от криволинейной поверхности через некоторые точки трёхмерного пространства проходит два или более лучей. Вдоль огибающих (рис. 21) интенсивность света существенно выше, чем в окрестности точек, лежащих вне огибающей. Подобное усиление интенсивности в точках огибающей может сопровождаться локальным повышением температуры, достаточным для воспламенения бумаги или дерева. Такие огибающие называют каустиками.

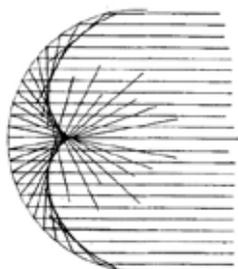


Рис. 21. Огибающая лучей, отражённых от линейной поверхности, образует каустики. Каустика, образованная отражением параллельного пучка сферической поверхностью, выглядит подобно катастрофе сборки.

Рассмотрим пучок параллельных лучей в плоскости, встречающихся с кругом (рис. 21) и отражающихся от его "задней стенки" согласно закону отражения. Отражённые лучи имеют огибающую - кривую с остриём (каустика). Каустика возникает из-за того, что, будучи касательными к ней, образующие её лучи почти совпадают между собой, и потому в малой части пространства собирается больше лучей, чем где-либо ещё, что и приводит к большей яркости.

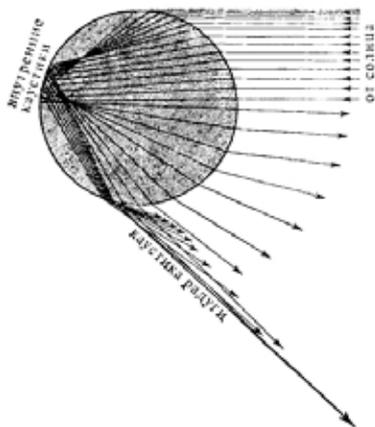


Рис. 22. Схема возникновения каустики типа радуга.

Самой известной каустикой является радуга, которая может служить примером катастрофы складки. Для света данной длины волны лучи, выходящие из шаровой капельки дождя (после одного внутреннего отражения), имеют огибающую каустик (рис. 22), которая является гладкой и (в сечении плоскостью рисунка) почти прямолинейной уже на расстоянии нескольких диаметров от капельки. Эта каустика отвечает катастрофе складки (рис. 23). Каустика вращается вокруг прямой, идущей от капельки к солнцу, и результат оказывается таким, как если бы капелька излучала яркий конус света с осью, указывающей на солнце. С изменением длины волны меняется угол при вершине конуса (поскольку показатель преломления для разных длин волн разный), так что можно представлять себе капельку излучающий свет коаксиальными окрашенными конусами, как на рис. 24.

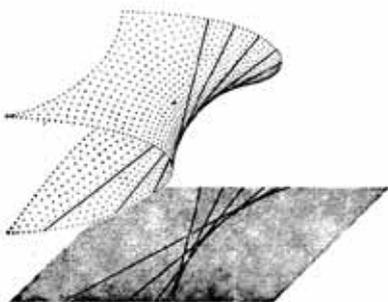


Рис. 23. Каустика радуги, отвечающая катастрофе складки.

Наблюдатель с земли увидит лучи данного цвета лишь в определённых направлениях, отвечающих углу при вершине соответствующего конуса, и в результате он видит многоцветную круговую дугу радуги (рис. 25). Радуги, состоящие из более, чем одной дуги, являются результатом многократного отражения лучей.

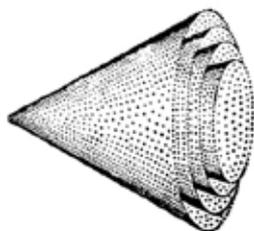


Рис. 24. Капелька воды, излучающая свет коаксиальными окрашенными конусами.

Крайне высокая интенсивность, которой обладают различные цвета в различных избранных направлениях, определяемых каустиками складки, не даёт им вновь смешаться в белый цвет. Вот почему радуга ярче своего окружения, и ора или облако служат для нее тёмным фоном.

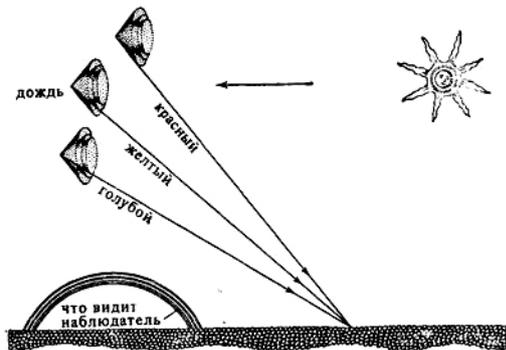


Рис. 25. Образование многоцветной дуги радуги.

Оптические катастрофы играют также роль в образовании некоторых типов миражей.

Миражи происходят, когда температурные градиенты в атмосфере искривляют лучи света. Если температура с высотой падает (рис. 26а), то световые лучи, попадающие в глаз наблюдателя, приходят туда по искривленным путям (рис. 26б). Эти пути имеют огибающую типа складки. Многозначный характер соответствующего многообразия катастрофы, который проявляется видимым образом: для объекта, находящегося в точке *A*, два идущих от него луча попадают в глаз наблюдателя. Хороший способ сделать этот эффект графически наглядным состоит в том, чтобы деформировать действительное "пространство объектов" таким образом, чтобы все световые лучи стали прямыми, поскольку именно так глаз интерпретирует то, что видит; тем самым получается фиктивное "пространство образов" (рис. 26в). Для объекта в точке *B* будут две видимые копии в пространстве образов, нижняя из которых перевернута вверх ногами.

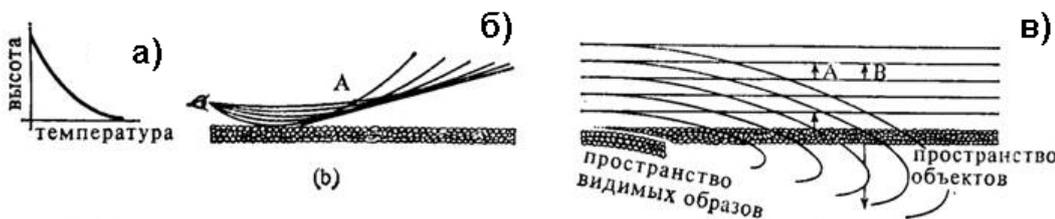


Рис. 26. Схема возникновения миража.

В случае, когда вместо складки появляется сборка, мы можем получить тройной мираж. При верхнем мираже температура должна иметь точку перегиба (рис. 27). Объект в точке *A* смещается немного кверху; объект в точке *B* смещается ещё больше и появляется трижды, причём средняя копия перевернута, а верхняя сильно сжата; объект в точке *C* смещается ещё выше и виден уже как один очень сильно удалённый образ.

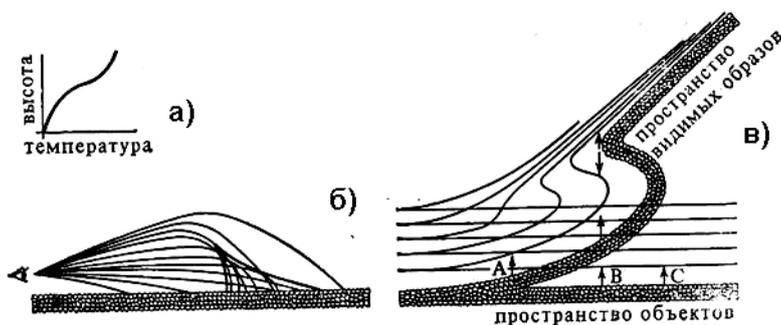


Рис. 27. Схема возникновения тройного миража.

Хотя на рисунках и видны огибающие, они имеют смысл, только когда выбрано положение наблюдателя, т.е. это не физические каустики.

2.7 Термодинамика и фазовые переходы

Классическая теория фазовых переходов естественным образом укладывается в рамки элементарной теории катастроф.

Как известно, в термодинамических системах вблизи точек фазового перехода такие параметры, как давление, температура, термодинамические потенциалы, удельная теплоемкость и т.п., испытывают разрывы и скачки, а внутри самих систем появляются крупномасштабные структуры, совершенно не мыслимые вдали от критических точек. Если взять для простоты физический газ в равновесном состоянии, то для него достаточно трёх макроскопических величин (температура, давление и объём). Эти величины не являются независимыми, потому что их связывают друг с другом уравнение состояния, которое описывает двухмерную поверхность в пространстве трёх параметров.

Скачкообразная перестройка структуры (катастрофа) характерна для всех фазовых переходов, например, переход жидкость-пар или жидкость-твёрдое вещество, которые демонстрируют ещё одну особенность катастрофы сборки. Резкий переход, описываемый классической сборкой с петлей гистерезиса, возможен и тут, когда перегретая жидкость взрывообразно испаряется (переохлажденная — мгновенно кристаллизуется), но обычно наблюдается постепенное испарение жидкости при сохранении постоянной температуры и давления до тех пор, пока не будет полностью завершен переход в новое состояние. В первом случае реализуется принцип максимального промедления, а в последнем — принцип Максвелла, который имеет место при высоком уровне “шума” (случайных внешних воздействий, порождающих флуктуации), не позволяющего осуществиться принципу максимального промедления.

Принцип максимального промедления - состояние системы определяется устойчивым (стабильным) или метастабильным минимумом до тех пор, пока он существует.

Принцип Максвелла - состояние системы определяется глобальным минимумом потенциальной функции.

Уравнение состояния реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса, 1873 г.) устанавливает связь между давлением, объёмом и температурой:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = nRT, \quad (28)$$

где p — давление, V_m — молярный объём T — абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная, n — число молей.

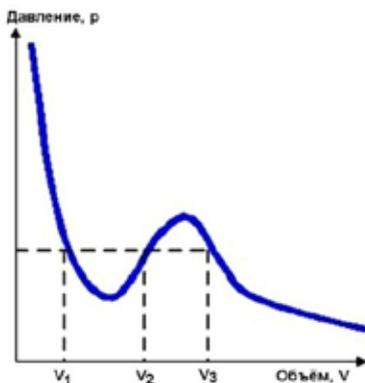
Это уравнение Ван-дер-Ваальса описывает поведение жидкости вблизи её критической точки. Уравнение было получено как соотношение между тремя параметрами V , P , T жидкости в окрестности её критической точки:

$$pV^3 - (RT + pb)V^2 + aV - ab = 0, \quad (29)$$

где p — давление, V — объём газа, R — газовая постоянная, T — температура, a и b — постоянные для каждого газа величины.

Уравнение Ван-дер-Ваальса описывает критическое многообразие катастрофы сборки. Если зафиксировать некоторую точку в этом многообразии, то можно исследовать линейный отклик системы на малые возмущения.

Рис.32. Кривая Ван-дер-Ваальса: функция $F(x;a,b) = \pm x^4 + ax + bx^2$, на базе которой строится поверхность, определяющая состояние системы газ-жидкость.



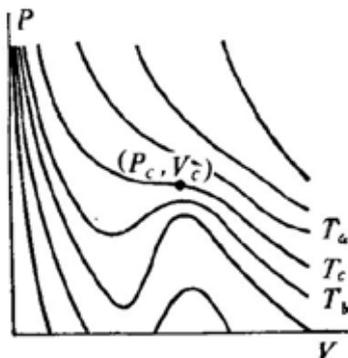
Разделим уравнение Ван-дер-Ваальса (29) на p

$$V^3 - (RT/p + b)V^2 + a/pV - ab/p = 0. \quad (31)$$

Уравнение катастрофы сборки A_{+3} :

$$F(x;a,b) = \pm x^4 + ax + bx^2 \quad (30)$$

Рис. 33. Набор кривых Ван-дер-Ваальса при разных температурах.



Переобозначив коэффициенты при V в (31), учитывая, что p прямопропорционально V , получим:

$$V^4 - BV^2 + AV - C = 0, \quad (32)$$

Кривая, описываемая уравнением (31) показана на рис. 32.

Замечание. Под критической точкой обычно понимают точку, где производная функция обращается в нуль. В термодинамике под ней понимают вырожденную критическую точку, которая является минимумом (для энтропии - максимумом).

Уравнение ван дер Ваальса обычно представляют графически, рисуя графики P в зависимости от V при различных значениях T (рис. 33). Более наглядным является представление в виде поверхности (рис. 34), образованной точками P , V , T . Пусть для

рассматриваемого вещества понижается давление при постоянной температуре. Из рисунка видно, что может представиться несколько возможностей.

- Если эта температура $T_a > T_c$, то объём плавно увеличивается.
- Если температура в точности равна T_c , то V будет непрерывной функцией от P .

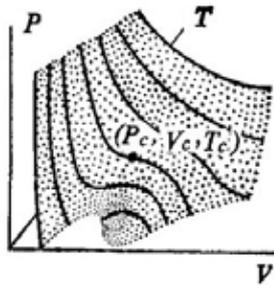


Рис. 34. Поверхность Ван дер Ваальса.

- Если эта температура равна $T_b < T_c$, то имеются давления, при которых возможны несколько значений объёма, так что из уравнения нельзя получить объём как функцию от давления. Очевидно, что вещество, вынуждаемое следовать по кривой $P-V$, должно в некоторой точке произвести скачок. Перед скачком вещество отвечает на малое уменьшение объёма значительно бóльшим увеличением давления, чем после скачка: трудносжимаемая жидкость внезапно становится легкосжимаемым газом.

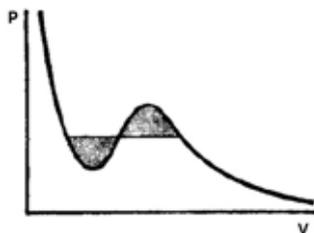


Рис. 35. Условие выполнения правила Максвелла.

Каким образом решает вещество, в какой точке совершить скачок? В 1875 г. Максвелл вывел правило равных площадей, согласно которому часть исходной кривой надо заменить горизонтальным отрезком прямой (рис. 35), так чтобы заштрихованные площади оказались равными.

Уравнение приобретает вид

$$x^3 + ax + b = 0, \quad (33)$$

где a и b константы, зависящие от температуры и давления.

Это - поверхность катастрофы сборки (рис. 36).

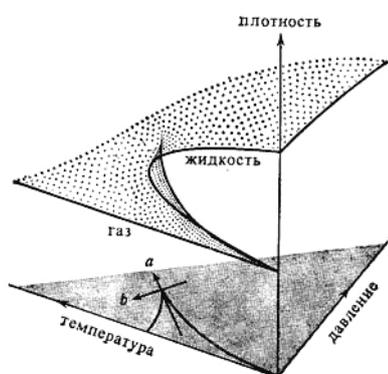


Рис. 36. Катастрофа в переходе жидкость-газ.

Замечание. Для описания фазовых переходов 1-рода используется аналогичная модель с потенциалом шестой степени

Рассмотрим теперь явление ферромагнетизма.

Теория катастроф активно используется при описании процесса намагничивания ферромагнетика, остывающего ниже точки Кюри. Возникающая при этом спонтанная намагниченность образует ориентированные случайным образом крупные однородные области — домены, а при наличии достаточно сильного внешнего магнитного поля, вся намагниченность ориентируется по полю. Благодаря такому эффекту в горных породах фиксируется направление магнитного поля Земли, которое было в определенные моменты их становления. Так, в магматических породах, содержащих магнитные минералы, фиксируется момент их остывания ниже температуры Кюри, когда начинает проявляться ферромагнетизм.

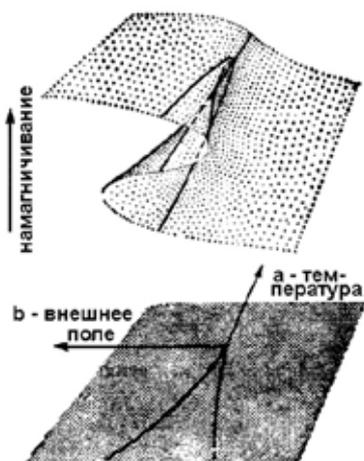


Рис. 37. Поверхность катастроф для ферромагнетизма.

При разрушении породы естественными процессами, мельчайшие частички оказываются намагниченными. Они переносятся реками и, в конце концов, осаждаются на дно океанов, морей и озер. В процессе медленного оседания в спокойной воде магнитные частички ориентируются по магнитному полю Земли. Таким образом, в последовательно накапливающихся слоях осадков, так же как и в последовательных порциях

изливающихся и застывающих вулканических лав, как на магнитной ленте записывается история изменения взаимной ориентации земного магнитного поля и данного участка земной поверхности. Анализ таких записей по всей Земле позволил обнаружить как изменения магнитного поля, включающие его “переворачивания”, когда северный полюс становится южным и наоборот, так и перемещения и развороты крупных участков поверхности Земли.



Рис. 38. Зависимость сопротивления материала (металла или керамики) от температуры

При температуре более высокой, чем некоторая температура T_c , вещество может быть парамагнитным, а при более низкой — ферромагнитным. Ферромагнитное вещество намагничено (обладает связанным с ним магнитным полем) даже в отсутствие внешнего поля.

Уравнение состояния $x^3+ax+b=0$ характеризует поверхность сборки (рис. 37) с точностью до диффеоморфизма с тождественной производной в точке Кюри.

Термодинамический потенциал для фазового перехода второго рода с архетипом катастрофы сборки, управляется лишь двумя меняющимися связями (такими как P и T). Уравнение состояния здесь также $x^3+ax+b=0$.

Можно показать, что в результате теплового возбуждения система может преодолеть энергетический барьер.

К обсуждаемым здесь явлениям относится переход вещества в сверхпроводящее состояние. Сверхпроводимость возникает при охлаждении материала ниже определенной температуры, которая называется критической T_k . Величина этой температуры у каждого сверхпроводника своя (рис. 38.). В этой точке электрическое сопротивление скачком падает до нуля.

Сверхпроводимость можно наблюдать у гелия ^4He . При понижении температуры жидкий He I

с нормальными свойствами переходит в сверхпроводящее состояние He II. В момент сверхпроводящего перехода теплоемкость C гелия резко возрастает до огромной величины, а при дальнейшем охлаждении быстро уменьшается. График этой зависимости напоминает греческую букву λ (рис. 39).

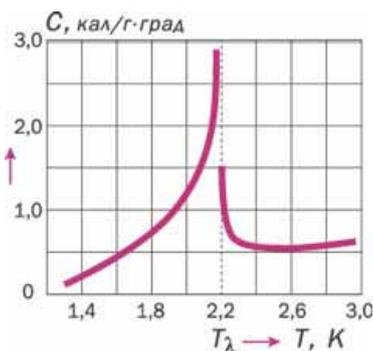


Рис.39 Зависимость теплоёмкости от температуры при переходе гелия в сверхпроводящее состояние

2.8 Биология и экология

История развития животного мира на Земле часто интерпретируется, как эволюционное развитие, прерываемое серией катастроф.

Примером такого подхода является катастрофизм — система представлений об изменениях живого мира во времени под влиянием событий, приводящих к массовому вымиранию организмов. Теория катастроф происходит от древних мифов о потопах. Основываясь на смене видового состава живых организмов, Ж. Кювье пришёл к выводу, что в результате крупных катастроф планетного масштаба происходило вымирание живого на значительной части земной поверхности. Восстановление флоры и фауны происходило за счёт видов, пришедших из других небольших локальностей. Против идей Кювье середине XIX выступил Ч. Лайелла, сторонник эволюционного учения Ч. Дарвина. Представления о важной роли катастроф в эволюции живого возродились позже в виде неокатастрофизма.

Известна целая группа эволюционных теорий, согласно которым видообразование происходит очень быстро — в течение нескольких поколений (**Сальтационизм** (*saltus* — скачок) — группа эволюционных теорий). Процесс связан с появлением новых особей, резко отличающихся и репродуктивно изолированных от представителей родительского вида. Сальтационизм позволяет объяснить такие явления, как неполнота палеонтологической летописи — отсутствие непрерывных

рядов переходных ископаемых форм между видами и надвидовыми таксонами; резкое снижение конкуренто- и жизнеспособности у переходных форм по сравнению с исходным видом и др.

Так, изучая наследование признаков у ослинника *Oenothera lamarckiana* Хуго де Фриз в 1901 г. наблюдал появление новых форм, морфологически резко отличающихся от родительских. На основании полученных результатов он сформулировал мутационную теорию, основным положением которой была внезапность появления новых, ранее не существующих видов в ходе единичных мутационных событий. В середине XX века Гольдшмидтом было сформулировано представление о системной мутации — это особый тип мутации, приводящий к появлению особей резко морфологически отличающихся от исходных форм и могущих дать начало новым видам. Системные мутации, возможно, связаны с изменением особых консервативных участков генома, ответственных за регуляцию морфогеनेза.

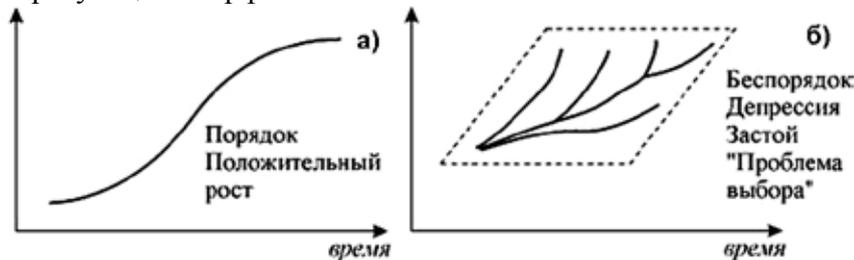


Рис. 40. Иллюстрация к понятиям «порядка» (а) и «беспорядка»(б).

Обычно в биологии в качестве «нормального», «стабильного» состояния рассматривается устойчивый рост (рис. 40а), для такого состояния системы разработана «нейтральная теория эволюции». Однако недавно молекулярная генетика прояснила роль стресса в эволюционном процессе.

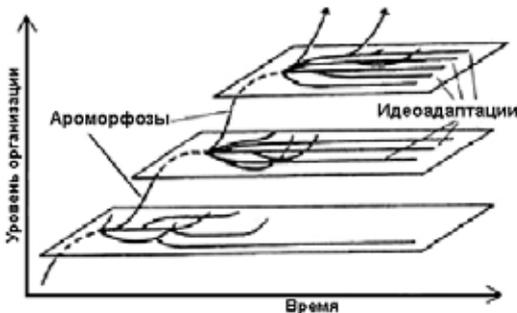


Рис. 41. Развитие уровня организации биологических систем: ароморфоз и идеоадаптация.

Дело в том, что ни один устойчивый рост не может продолжаться вечно. Простейшее логистическое уравнение описывает ограничение роста, связанное с исчерпанием ресурса, как выход на стационар. На практике замедление роста в дальнейшем сопровождается депрессией, стагнацией, уменьшением характеристических показателей. В этой стадии система встает перед проблемой выбора другой стратегии жизни (другого ресурса). Если новый ресурс (новая жизненная стратегия) выбран правильно и действительно может обеспечить дальнейший активный рост, начинается новая стадия «устойчивого роста» типа А. Обе стадии А (ароморфоз) и В (идеоадаптации) являются «естественными» стадиями в развитии систем (рис. 41). В неблагоприятных условиях (на стадии беспорядка В) у микроорганизмов резко повышается скорость мутационного процесса. На дрозофилах было показано, что при стрессе у эукариот происходит скачкообразная реализация ранее накопленной, но скрытой генетической изменчивости, одновременно происходит ускорение процессов мутации.

Теория катастроф (модель катастрофы с ограничениями, применимая к областям, имеющим границы) позволила объяснить, почему пчёлы встречаются либо как виды, для которых характерен одиночный образ жизни, либо как общественные насекомые, образующие очень большие группы. Здесь используется один из основных экологических принципов: виды с меньшей эффективностью использования ресурсов среди конкурирующих за ту же самую пищу вытесняются под давлением естественного отбора. Если пчела собирает мед с небольшого пространства, способна летать с большой скоростью и переносить большое количество нектара, то она предпочитает жить в одиночестве или в небольшом коллективе. Слабые пчелы с низкой эффективностью сбора нектара, вынужденные к тому же собирать мед с обширных площадей, т.е. тратить большое время на перелёты, вынуждены образовывать большие сообщества (несколько тысяч), которые оказываются конкурентоспособными благодаря разделению труда в улье. Математика мёдоносных пчёл весьма интересна, и она стоит того, чтобы ей посвятить отдельную лекцию.

Перейдём теперь к рассмотрению проблемы роста популяции животных.

При углублении неравновесности в открытой системе возникает определенная последовательность бифуркаций, сопровождающаяся сменой структур. Состояние системы в момент бифуркации является неустойчивым и бесконечно малое воздействие может привести к выбору дальнейшего пути. Финальным состоянием эволюционирующих систем является состояние динамического хаоса.

Иллюстрацией перехода к нему является логистическое уравнение:

$$X_{n+1} = CX_n(1 - X_n) \quad (34)$$

Для наглядности рассмотрим биологическую трактовку этого уравнения: изолированно живёт популяция особей нормированной численностью X_n . Через год появляется потомство численностью X_{n+1} . Рост популяции описывается первым членом правой части уравнения — CX_n , где коэффициент C определяет скорость роста и является определяющим параметром. Убыль (за счёт перенаселенности, недостатка пищи и т.п.) определяется вторым, нелинейным членом — $(CX_n)^2$.

Линии показывают значения X_n при больших n . При $C < 1$ популяция с ростом n вымирает. В области $1 < C < 3$ численность популяции приближается к постоянному значению $X_0 = 1 - 1/C$. Это область стационарных решений. Затем в диапазоне $3 < C < 3.57$ появляются бифуркации, разветвление кривых на две. Численность популяции колеблется между двумя значениями, лежащими на этих ветвях. Сначала популяция резко возрастает, на следующий год возникает перенаселенность и через год численность снова становится малой. Далее происходит перекрывание областей различных решений, и поведение системы становится хаотическим. Динамические переменные X_n принимают значения сильно зависящие от начальных. М.Фейгенбаум установил универсальные закономерности перехода к динамическому хаосу при удвоении периода, которые были экспериментально подтверждены для широкого класса механических, гидродинамических, химических и т.д. систем. Наряду с последовательностями удвоений периода (каскадами Фейгенбаума) имеются другие пути перехода к хаосу, когда, например, длительные периоды упорядоченного движения чередуются со вспышками беспорядка.

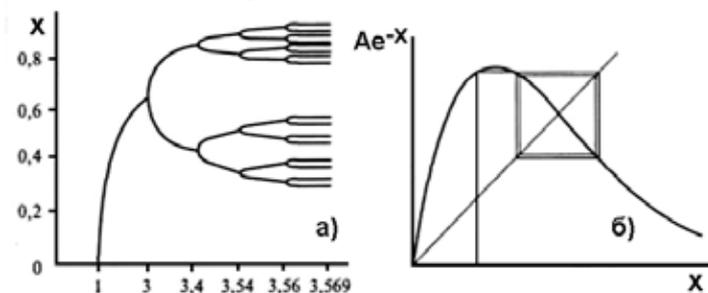
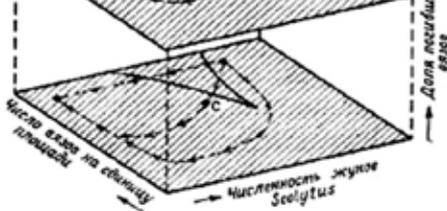


Рис. 42. Бифуркации в численности популяции: а – каскад удвоений периода; б – колебания численности популяции в модели Мальтуса.

В качестве примера использования теории катастроф в биологии рассмотрим заболевание голландского вяза. Возбудителем этого заболевания, вызывающего высыхание верхушек деревьев и их гибель, является гриб *Ceratocystis ulmi*, который переносится от дерева к дереву жуками-короедами рода *Scolytus*. После 1927 г. в Англии произошло несколько вспышек этого заболевания, когда оно, очевидно, переходило от эндемической стадии к эпидемической. Типичный путь развития эпидемии начинается в точке A , для которой характерно большое число язвов на единицу площади и низкая численность популяции жуков. Если популяция жуков увеличивается (например, в мягкие зимы), этот путь пересекает складчатую особенность в точке T и скачком переходит в точку B эпидемической стадии, для которой характерны наличие агрессивного штамма и гибель значительной части зараженных деревьев.

Рис. 43. Модель заболевания голландского вяза.



Из точки B система может двигаться двумя различными путями. Если в результате эпидемии или выборочной рубки число язвов на единицу площади существенно уменьшается и параллельно

уменьшается численность жуков, то заболевание постепенно возвращается к эндемическому уровню. Если, однако, вследствие соответствующей обработки или неблагоприятных условий популяция жуков резко сокращается прежде, чем существенно уменьшается численность вязов, то «путь» заболевания переходит через складку, совершая резкий переход в точку C эндемического уровня, причем скорость перехода зависит от размаха складки.

Перейдём теперь к проблемам экологии.

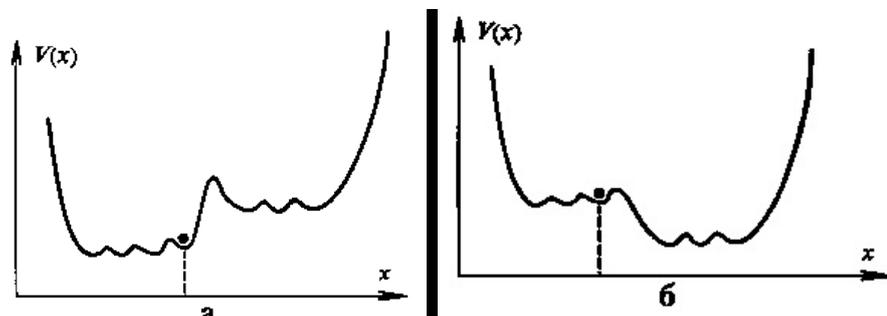


Рис. 44. Два типа потенциала: а - система устойчива; б - система неустойчива.

Экологическую обстановку можно представить в виде некоторой функции $V(x)$, или потенциала. В зависимости от его формы обстановка может обладать либо сравнительно большой (а), либо малой (б) устойчивостью. Здесь параметр x характеризует качество ситуации с экологической точки зрения (например, среднее содержание вредных примесей в атмосфере). Пусть реализуемы только такие значения x , при которых некоторая функция (потенциал, рис. 44) принимает свое минимальное значение. Малые возмущения системы (малая загрязненность атмосферы) – устойчивое состояние находится в одной из точек локального минимума в нижней части графика.

Малые возмущения системы, обусловленные, например, деятельностью человека, могут лишь немного изменять загрязненность атмосферы – устойчивое состояние находится в одной из точек локального минимума в нижней части графика (система “сидит” в этой точке надежно). Перевод системы в опасное состояние – в соседний локальный минимум, соответствующий высокой загрязненности, – практически невозможен: нужен слишком большой толчок, заставляющий систему преодолеть высокий барьер, отделяющий точки минимума.

Однако при изменении условий (например, при накоплении отходов промышленного производства) характер зависимости потенциала от x может измениться. Тогда даже небольшой толчок может заставить систему “свалиться” в устойчивое состояние с высоким уровнем загрязненности атмосферы. Такой переход может совершиться очень быстро, в считанные годы.

2.9 Экономика

Надежды на то, что теория катастроф позволит определить механизм финансовых и экономических кризисов и банкротств не оправдались, но всё же этот подход позволил наглядно проиллюстрировать некоторые проблемы в экономике.

Катастрофические падения курсов акций на фондовых биржах можно описать моделью разрастающихся флуктуаций. Событие начинается с того, что приток нежелательной информации приводит к резкому падению цен акций всего нескольких крупных компаний. Этот сброс вызывает возрастающую панику среди брокеров, которые болезненно воспринимают любые колебания рынка, и к концу торгового дня лавинообразно катятся вниз цены акций многих тысяч иных, вполне благополучных компаний, а с ними и показатели всей биржи. Немаловажно и ожидание катастрофы (фактор самосбывающегося пророчества).

Введём функцию, характеризующую состояние экономики (например, величину дохода) в зависимости от какого-либо параметра (например, предприимчивость населения). Если экономика регулируется так, чтобы обеспечивать максимизацию функции, то система будет находиться в точке максимума A (рис.9) – оптимальное решение здесь единственно. По мере развития системы возникает побочный максимум B – новый локально-оптимальный, но вообще-то не наилучший режим. Он рождается вместе с близким локальным минимумом. Далее, побочный максимум

обгоняет исходный (С). Начиная с этого момента, новый режим уже выгоднее старого. Но переход на него затруднён необходимостью резкого перескока - катастрофы. Отсюда вытекает правило:

При плавном переходе от одного локально-оптимального режима к другому необходимо временное ухудшение.



Рис. 45. Сценарий глобальных перестроек в развивающейся системе. При плановом переходе от одного локально-оптимального режима к другому необходимо временное ухудшение.

В линейных системах малое изменение параметра в сторону лучшего режима улучшает положение. В отличие от этого, в стадии катастрофы, после достижения локального оптимума малые изменения управляющего параметра, направленные в сторону лучшего режима, не улучшают, а ухудшают ситуацию. И если, система стремится локально оптимизировать своё состояние, то она будет отвечать на недостаточно радикальные изменения возникновением сильных тенденций возврата к старому режиму. Этим объясняется неудача многих реформ. Наконец, в ходе дальнейшего развития системы исходное локально-оптимальное состояние вообще исчезает (D) и переход на далёкий от первоначального режим становится неизбежным (E).

Важно понимать, что движение от худшего состояния в сторону лучшего сразу же приводит к ухудшению. Скорость ухудшения при равномерном движении к лучшему состоянию увеличивается. По мере движения от худшего состояния к лучшему сопротивление системы растет. Максимум сопротивления достигается раньше, чем самое плохое состояние, через которое нужно пройти для достижения лучшего. После прохождения максимума сопротивления состояние продолжает ухудшаться. По мере приближения к самому плохому состоянию сопротивление, начиная с некоторого момента, начинает уменьшаться и, как только самое плохое состояние пройдено, не только полностью исчезает сопротивление, но система начинает “притягиваться” к лучшему состоянию. Слабо развитая система может перейти в лучшее состояние почти без предварительного ухудшения, в то время как развитая система, в силу своей устойчивости, на такое непрерывное улучшение неспособна. Если, однако, систему удастся сразу, скачком, а не непрерывно, перевести из

плохого устойчивого состояния в состояние, достаточно близкое к лучшему, то дальше она сама собой будет эволюционировать в сторону лучшего состояния.

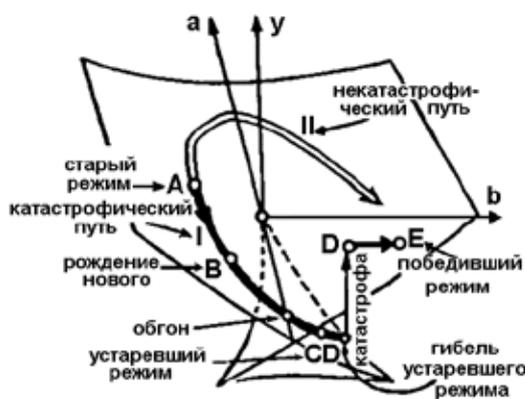


Рис. 46. Ласточкин хвост: универсальный закон зависимости оптимальных значений от параметров.

Все возможные сценарии взаимодействия двух локально-оптимальных режимов даются универсальным законом $y = x^4 + ax^2 + bx$ с параметрами a и b . На рис. 46 изображён график экстремального значения y как функции параметров a и b .

Сценарий перехода от одного состояния к другому изображается на графике путём I, заканчивающимся катастрофическим скачком. Однако к той же самой конечной цели можно прийти без катастрофы, даже зайдя уже достаточно далеко по катастрофическому пути. Для этого надо вернуться назад и обойти разделяющую конкурирующие режимы точку с другой стороны (путь II).

2.10 Психология

Рассмотрение моделей поведения начнём с достаточно простой модели агрессивного поведения собаки. Эта модель предложена К.Зиманом, который основывался на работах психолога К. Лоренца. Согласно Лоренцу, конфликтными факторами, определяющими агрессивное поведение собаки, являются страх и ярость, степень интенсивности которых можно измерить. Поведение собаки Зиман описывает переменной x с диапазоном изменений от бегства до нападения и

проходящей через нейтральное состояние. Предполагается, что зависимость агрессивности от ярости можно изобразить в виде монотонно возрастающей функции. Аналогично увеличение страха ведет к монотонному уменьшению агрессивности. При умеренном воздействии ($a > 0$) собака будет проявлять плавное изменение отклика с испуга на злость в зависимости от того, как было проведено воздействие. Но более высокий уровень воздействия — это стресс, соответствующий переходу в область $a < 0$. В этом случае если собака изначально испугалась, она останется испуганной при увеличении уровня воздействия на неё, пока в конечном итоге она не достигнет точки возврата, где произойдёт спонтанный переход в режим злобы. При переходе в этот режим собака будет оставаться озлобленной даже в случае постепенного снижения воздействия на неё.

Если собака испытывает только сильный страх, то наиболее вероятное её поведение будет бегство. Если собака испытывает только сильную злобу, то она будет нападать. Каким будет её поведение, если она одновременно испытывает и страх, и ярость? Однозначно предсказать поведение в этом случае нельзя: она может и нападать, и обращаться в бегство: нет каких-либо видимых признаков, по которым можно было бы судить о её поведении в следующий момент. Более того, при одних и тех же значениях показателей страха и ярости животное могло повести себя совершенно по-разному. В этом случае имеет место бимодальность в поведении. На основе этих закономерностей поведения, Зиман делает вывод, что зависимость поведения собаки от этих двух параметров (страха и ярости) можно изобразить трёхмерным рисунком катастрофы "сборка" (рис. 47). Катастрофы (резкие скачки в поведении) будут соответствовать в этом случае нападению и бегству собаки.

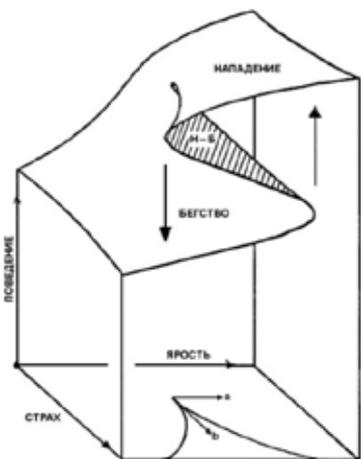


Рис. 47. Поверхность состояния собаки, характеризующая зависимость агрессивности собаки от «количества» гнева и страха. Подобные поверхности неоднозначны, то есть любому сочетанию переменных соответствует несколько положений – состояний собаки.

В том случае, когда страх и ярость возбуждаются одновременно, поведение собаки может «пойти» по верхней – агрессивной – или по нижней – «трусливой» – частям катастрофической складки, и её поведение будет полностью определяться с самого начала сделанным «выбором». Поэтому возбужденное животное скорее склонно броситься кусаться или обратиться в бегство, нежели пребывать в состоянии пассивной нейтральности.

Катастрофа сборки иллюстрирует не только агрессивное, но и другие виды эмоционального поведения. Любое поведение определяется, в конечном счете, нейронной активностью мозга. Возможно, активность мозга на нейронном уровне удастся описать методами теории катастроф. Модель катастрофы сборки также годится для описания поведения особей, стоящих как выше, так и ниже в эволюционном развитии, чем собака. В частности, предложена модель агрессивного поведения тропических рыб по захвату территории для постройки убежища, а также модели эмоционального поведения человека в некоторых конфликтных ситуациях.

Были попытки применить теорию катастроф для описания творческого процесса ученого.

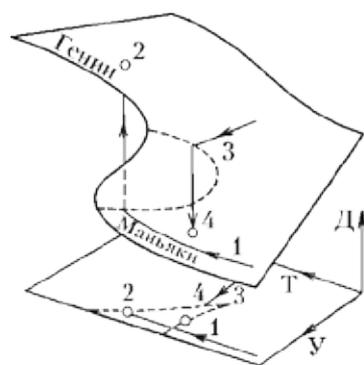


Рис. 48. Геометрическое описание творчества учёного в координатах его достижений (Д), увлеченности (У) и владения техникой исследований (Т).

Будем характеризовать творческую личность (например, учёного) тремя параметрами, называемыми «техника», «увлеченность», «достижения», между которыми существует некая зависимость, которую можно представить в виде поверхности в трёхмерном пространстве с координатами (Т, Д, У). При проектировании этой поверхности на плоскость (Т, У) вдоль оси Д возникает особенность — сборка.

Рассмотрим достижения учёного в зависимости от его увлечённости и технической возможности. Если увлеченность невелика, то достижения монотонно и довольно медленно растут с

техники. Если увлеченность достаточно велика, то наступают качественно новые явления. В этом случае достижения с ростом техники могут расти скачком (такой скачок будет, например, если техника и увлеченность меняются вдоль кривой на рис. 48 в точке 2). Область высоких достижений, в которую мы при этом попадаем, обозначена словом «гений». С другой стороны, рост увлеченности, не подкреплённый соответствующим ростом техники, приводит к катастрофе (на кривой 3 в точке 4, рис. 48), при которой достижения скачком падают, и мы попадаем в область обозначенную словом «маньяки». Интересно, что скачки из состояния «гений» в состояние «маньяк» и обратно происходят на разных линиях, так что при достаточно большой увлеченности гений и маньяк могут иметь равные увлеченности и техники, различаясь лишь достижениями (и предысторией).

2.11 Социологическое моделирование

В социальной психологии теорию катастроф использовали в изучении социального поведения, социальной установки и т.д. Примером является исследование нарушений режима в тюрьме Гартри в 1972 г., проведенное Зиманом. Оказалось, что факторы, влияющие на беспорядки, могут быть разделены на две в основном независимые группы:

- Напряженность - чувство разочарования и безвыходности, бедственное положение;
- Разобщенность - взаимная отчужденность, отсутствие общения, разбиение на два лагеря.

При плавном ухудшении условий содержания заключенных количество протестных акций и насильственных действий против охраны и конвоя изменяется нерегулярным и скачкообразным образом. Функция, связывающая вероятность бунта с такими величинами, как средняя продолжительность ежедневной прогулки, калорийность суточного рациона, вероятность заключения в карцер, непрерывна и даже довольно гладкая. Но у нее есть особенности типа сборки, вблизи них и происходят «катастрофы».

С ростом напряженности повышается вероятность волнений, а увеличение разобщенности ведёт к тому, что волнения принимают характер более внезапных и яростных вспышек. Это заставляет подумать о катастрофе сборки (рис. 49). Система вначале "садится" по вертикали на многообразие катастрофы ("быстрый поток"), а затем подчиняется обратной связи ("медленный поток"). Из рис. 49 видно, что при низких значениях разобщенности система стремится к устойчивому положению умеренного волнения, но при высоком уровне разобщённости она совершает колебания внутри бифуркационного множества катастрофы сборки, прыгая попеременно с верхнего листа на нижний и обратно. Эта картина будет отчасти смазываться случайным шумом, но колебательный характер поведения, тем не менее, должен проявиться.



Рис. 49. Катастрофа тюремного бунта.